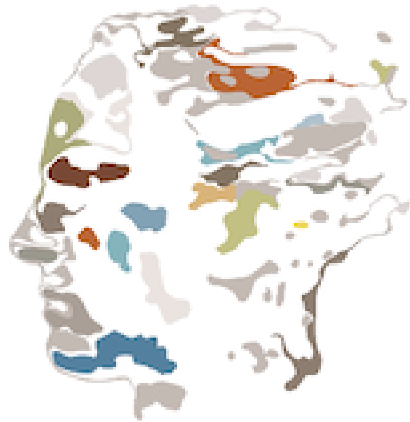


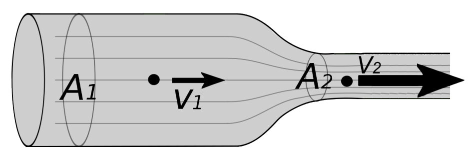
Luis Caffarelli
Vinner av Abelprisen 2023

Matematikken i Matematiske modeller

Hvis du spår at været i dag vil være det samme som det var i går, vil du treffe med en sannsynlighet på omtrent 0,5. Hvis du i tillegg tar med deg noen gamle værtegn, som “Morgen rød gir aften bløđ, aften rød gir morgen sød”, vil du klart øke treffprosenten. Men likevel, hvis planen for morgendagen er å krysse et åpent havstrekk, vil en mer kunnskapsbasert prognose sannsynligvis være å foretrekke. Det smarteste vi være å sjekke yr.no eller en værmelding for finne ut hva meteorologen sier om hvilke utfordringer du kan tenkes å møte ute på havet.

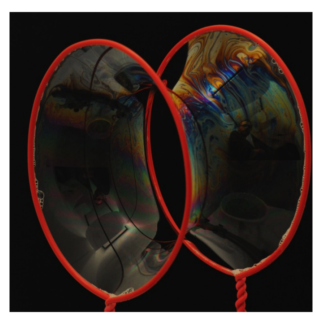
Så når vinden blåser akkurat passe i storseilet og solbrillene er funnet fram, kan du sende en varm tanke til meteorologen som matet datamaskinen med data og fysiske lover for å gi deg en nærmest perfekt beskrivelse av dagens praktfulle seilervær.

Værmelding, så vel som mange andre modeller for hvordan naturen oppfører seg, er basert på det som kalles “partielle differensialligninger”, eller PDE. Det generelle oppsettet for en PDE som en matematisk modell for noe vi observerer i naturen, er en korrespondanse mellom krefter som virker og en påfølgende konsekvens. Konsekvensen kan enten beskrives som en tidsbasert prosess, eller bare som en geometrisk konfigurasjon hvor tiden ikke er involvert. Kreftene som virker kan stamme fra ulike kilder, det kan være fra et gravitasjonsfelt, fra trykkforskjeller eller en temperaturgradient. I tillegg til kreftene som virker, spiller geometrien til systemet vi studerer en viktig rolle.



Source: Rune Mathisen. (https://ndla.no/article/10454)

Bevegelsen til en gass som strømmer gjennom et rør er i stor grad avhengig av formen på røret. I en innsnevring i røret vil gassen strømme raskere, og hindringer vil kunne forårsake turbulens. Dypper du en metallramme i såpeboblevann, vil såpefilmen danne en minimalflate som er fullstendig bestem av geometrien til metallrammen.



Source: Soapbubble.dk

Gassstrømmen gjennom et rør er modellert av det som kalles Navier-Stokes-ligningene. Ligningene er satt opp som en kombinasjon av Newtons 2. lov for bevegelse i fluider, sammen med en antagelse om hvordan molekylene i fluidet samhandler. En løsning av Navier-Stokes-ligningene er et hastighetsfelt som beskriver fluidets hastighet til enhver tid og i ethvert punkt. Dersom denne løsningen er en begrenset funksjon, betyr det at hastigheten i fluidet aldri vil overstige en gitt verdi. I den fysiske verden er ikke dette noe problem siden uendelig hastighet er en fysisk umulighet. Men vi kan likevel undre oss over om det faktisk finnes en øvre grense for hastigheten til en tornado, eller om framtida stadig vil gi oss nye fartsrekorder. Vi formulerer gjerne dette som et spørsmål om modellen utvikler ubegrensede løsninger i endelig tid.

Hva da med Navier-Stokes-likningene? Vil de utvikle ubegrensede løsninger i endelig tid? Svaret er at det vet vi ikke. I det hele tatt er det lite vi vet om løsningen av Navier-Stokes-likningene. Det på tross av hvor sentrale likningene er og hvor mange som har brukt tid og krefter på å prøve å finne en løsning. The Clay Mathematics Institute har kalt dette for ett av de syv viktigste åpne problemene i matematikk og det er utlovet en belønning på 1 millon dollar for en løsning eller et moteksempel.

Navier-Stokes-likningene er en dynamisk prosess hvor tid inngår som en parameter, dvs. ligningen modellerer hva som skjer over tid basert på kreftene som virker og geometrien i systemet. Et eksempel på et fysisk fenomen som er modellert av en PDE, men som ikke involverer tid som parameter, er minimalflateproblemet, som vi har illustrert med en ramme dyppet i såpeboblevann. Såpefilmen vil alltid danne en flate med minimalt areal, selvfølgelig tilpasset at flaten skal henge fast i rammen.

Selv om vi betrakter dannelsen av en minimal såpeflate som et rent geometrisk resultat, er det selvfølgelig en tidsavhengig prosess i forkant. Når vi tar rammen opp av såpevannet vil såpemolekylene jobber raskt og finne sin endelige posisjon på en brøkdel av et sekund. I prosessen beveger de seg rundt, leker seg med alle de andre molekylene, og slår seg til slutt til ro. De har nådd en likevektstilstand. På denne måten kan vi betrakte løsningen av den tidsuavhengige modellen som en likevektstilstand for en tidsavhengig prosess.

En felles problemstilling for alle matematiske modeller er å finne løsninger av likningene som inngår i modelen. Anta at du har funnet en matematisk modell for et fenomen i naturen og at du i tillegg er i stand til å finne løsninger på de involverte ligningene. Da vil du faktisk være i stand til å kunne forutsi noe om framtida basert på et vitenskapelig resonnement. Spådommene vil være langt mer verdifulle enn om du bare gjettet.

Problemet er imidlertid at det generelt er veldig vanskelig å finne løsningene. I mange tilfeller kan det til og med være vanskelig å bevise at det i det hele tatt finnes noen løsninger, slik tilfellet er med Navier-Stokes-likningene. Og dersom du vet at det faktisk finnes løsninger, så kan de gjerne ha svært dårlige egenskaper, som for eksempel at de er ubegrenset.. Luis Caffarelli har viet sitt profesjonelle liv til å studere egenskaper for løsningene av ulike partielle differensialligninger. Takket være innsatsen hans og av mange andre matematikere har vår innsikt i løsningenes natur økt betydelig de siste 50 årene. Caffarellis betydning i denne prosessen kan beskrives med et sitat fra Abelpriskomiteens begrunnelse for årets tildeling: "Combining brilliant geometric insight with ingenious analytical tools and methods, he [CaffarellI] has had and continues to have an enormous impact on the field".