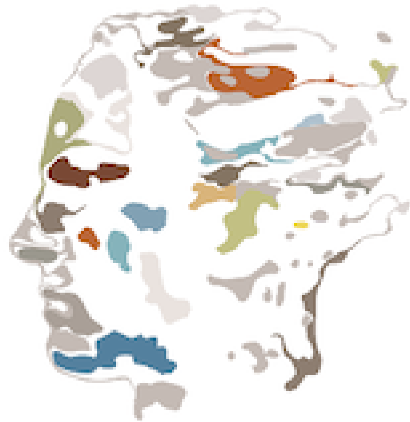

Dennis Parnell Sullivan
Abelprisvinner 2022

Ingen vandrende områder

Abelkomiteen sier i sin begrunnelse for årets tildeling:

... In dynamics, Sullivan introduced a dictionary between Kleinian groups and iterated rational maps, pivoting on the theory of measurable complex structures. He proved that rational maps have no wandering domains, solving a 60 years old conjecture of Fatou ...

Baner i dynamiske system

Et dynamisk system er en matematisk modell som beskriver en tids-utvikling av et fysisk system. Et dynamisk system har to hovedkomponenter:

- En mengde av tilstander for systemet, hvor hver tilstand er en spesifisering av verdiene på alle parametrene som inngår i modellen
- En regel som beskriver dynamikken i systemet, dvs. hvordan systemet går fra en tilstand til den neste

En bane i et dynamisk system er en ordnet mengde av tilstander hvor den neste tilstanden er dynamikkens lovmessige tilordning til den forrige.

Været er et dynamisk system. En tilstand for været er en angivelse av meteorologiske data, slik som temperatur, lufttrykk, fuktighet, vind-styrke og -retning, og eventuelt andre parametre. Med utgangspunkt i en tilstand kan meteorologene ved å støtte seg på naturlovene komme med en kvalifisert spådom av hvordan de samme parametrene vil se ut et lite tidsintervall senere. Kraftige regnemaskiner kan i løpet av kort tid gjenta denne prosessen tusenvis av ganger og på den bakgrunn komme med relativt presise værvarsler.

Været er et svært komplisert dynamisk system. For å illustrere begreper knyttet til teorien for dynamiske systemer, velger vi oss derfor et mye enklere system. Tilstandene er de reelle tallene og dynamikken lar vi være gitt av funksjonen $f(x) = x^2 - 1$. En bane i det dynamiske systemet er bestemt av en startverdi x_0 og iterasjoner av funksjonen f, dvs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$. Hvis vi lar startpunktet være $x_0 = 2$, så vil iterasjonen av funksjonen $f(x) = x^2 - 1$ gi oss banen

$$\{2, 3, 8, 63, 3968, \dots\}$$

som innebærer at $f^n(x_0) \to \infty$ når $n \to \infty$. Velger vi derimot startpunktet $x_0 = 1$ får vi en etter hvert periodisk bane

$$\{1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$$

siden $f(-1) = 0$ og $f(0) = -1$. Vi kan endre startpunktet bare litt, og starte med $x_0 = 0.9$. Da får vi banen

$$\{0.9, -0.19, -0.96, -0.07, -0.99, \dots\}$$

Denne banen vil etter hvert konvergere mot den periodiske banen $\{-1, 0\}$.

Siden funksjonen er den samme for alle banene, vl banene være entydig bestemt av sitt startpunkt. En klassifikasjon av banene er dermed det samme som en klassifikasjon av startpunktene.

Ulike startpunkter kan gi veldig ulike baner. Vi har sett at å starte med $x_0 = 2$ betyr at iterasjonene vil gå mot ∞, mens

$x_0 = 0.9$ betyr at vi konvergerer mot en periodisk bane. Det siste vil faktisk være tilfelle for alle startpunkter i intervallet

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

med unntak av $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hvor $f(z) = z$, og som vi beskriver som et fikspunkt for funksjonen.

Vi deler mengden av startpunkter opp i to kategorier, de tamme og de ville. De tamme punktene er slik at for alle startpunkter i nærheten av dem, så vil banene ha relativt like egenskaper. For punktene i intervallet $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der alle banene, på ett unntak nær, konvergerer mot den periodiske banen $\{-1, 0\}$, har vi en slik felles egenskap. Mengden av tamme punkter kaller vi Fatou-mengden til det dynamiske systemet. Komplementet til Fatou-mengden, bestående av de ville punktene, kalles Julia-mengden. Et eksempel på et vilt punkt i Julia-mengden for iterasjonen $f(x) = x^2 - 1$ er fikspunktet $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Banen til z består kun av z, men starter vi iterasjonen rett til siden for z, får vi en følge av iterasjoner som beveger seg vekk fra z, og som konvergerer mot den periodiske banen $\{-1, 0\}$. Alternativt kan vi si at et punkt z i Julia-mengden er ustabilt i forhold til den typen bane som iterasjonen setter opp i punktet.

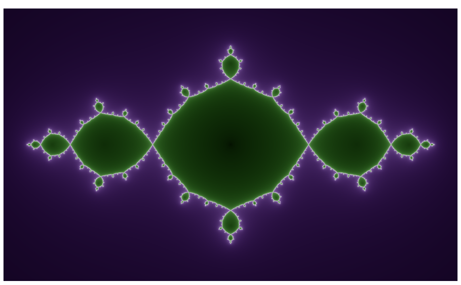

Foto: Georg-Johann Lay

Figure 1: Illustrasjon av det dynamiske systemet gitt ved $f(z) = z^2 - 1$, $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Den hvite kurven er Julia-mengden, mens den lilla og den grønne mengden er de to komponentene av Fatou-mengden. Den lilla viser alle startpunkter hvor banen vil gå mot ∞, mens punkter i den grønne mengden vi danne baner som etter hvert konvergerer mot den periodiske banen $\{-1, 0\}$.

Fatous formodning om ikke-vandrende områder

På 1920-tallet stilte Pierre Fatou opp en formodning om de tamme punktene for et rasjonalt dynamisk system over de utvidede komplekse tallene $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sullivan beviste formodningen i 1985 og endret med det statusen for resultatet fra Fatous formodning til Sullivans teorem.

Teorem (Sullivan, 1985). Hvis $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ er en rasjonal avbildning av grad $d \geq 2$, så vil hver komponent U av Fatou-mengden $F(f)$ etter hvert bli periodisk.

Betegnelsen no-wandering domain conjecture refererer til at periodiske komponenter ikke vandrer; en vandrende komponent U er slik at $U \cap f^p(U) = \emptyset$ for alle $p \geq 2$. Et eksempel på en vandrende komponent finner vi for iterasjonen gitt ved $f(z) = z + 2\pi \sin z$. De hvite feltene i figuren illustrerer en vandrende komponent av Fatou-mengden, se f.eks. på banen til punktet $z_0 = \frac{\pi}{2}$; den er gitt ved

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$$

Vi merker oss at funksjonen $f(z) = z + 2\pi \sin z$ ikke er rasjonal og denne observasjonen strider derfor ikke mot Sullivans teorem.

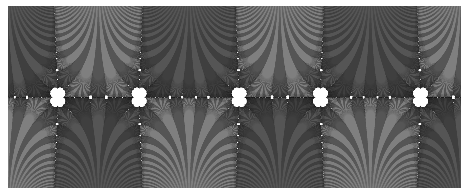

Foto: Lasse Rempe-Gillen

Figure 2: Illustrasjon av det dynamiske systemet gitt ved $f(z) = z + 2\pi \sin z$, $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Sullivans bevis for no-wandering domain theorem bygger på dyp innsikt i geometrien til det utvidede komplekse planet og funksjoner definert på det. En antagelse om at det finnes vandrende komponenter for en rasjonal funksjon av grad $d \geq 2$ leder til eksitsistensen av uendelig mange lineært uavhengige rasjonale funksjoner av grad $d \geq 2$. Imidlertid er det vel kjent at vektorrommet av rasjonale funksjoner av grad $d \geq 2$ er endelig dimensjonalt, og en motsigelse gir oss det nødvendige argumentet for at teoremet er sant.