Abelprisen 2009

Vekstraten til endelig genererte grupper

Har du noen gang tenkt over hvor mange ord språket inneholder? I denne artikkelen skal vi gi et svar på en noe forenklet versjon av det spørsmålet og relatere det til Gromovs resultat om vekst av virtuelt nilpotente grupper, publisert i 1981.

Det er selvfølgelig ingen god ide å starte å telle ord i et språk, men likevel, la oss forsøke. Vi starter med å betrakte ord av lengde 1, slik som i, ø og å. Hvis vi er litt strenge med hva vi mener med et ord så er det vel ikke flere enn disse. Lista over ord av lengde to er mye lenger; vi har to, ku, så, ta og hi for å nevne noen. Vi skal ikke fortsette på disse listene, vi skal heller forandre spillereglene og fokusere på et språk som viser seg å inneholde en veldig viktig matematisk konstruksjon. Her er reglene:

1. Alfabetet inneholder kun to bokstaver, x og y.
2. Alle kombinasjoner av x´er og y´er er ord i dette språket, med to unntak, kombinasjonene xx og yyy skal ikke forkomme i språket.

La oss nå telle antall ord i ordboken. I tabellen har vi listet alle de korteste ordene, sortert etter lengde.

Lengde	Ord	Antall
1	x,y	2
2	xy, yx, yy	3
3	xyx, yyx, yxy, xyy	4
4	xyxy, xyyx, yxyx, yxyy, yyxy	5
5	xyxyx, xyxyy, xyyxy, yx-yxy, yxyyx, yyxyx, yyxyy	7
6	xyxyxy, xyxyyx, xyyxyx, xyyxyy, yxyxyx, yxyxyy, yxyyxy, yyxyxy, yyxyyx	9

La nå W(n) betegne antall ord av lengde n. Et elementært kombinatorisk argument (som vi utelater av plasshensyn) gir at W(n) er lik summen W(n-1)+W(n-5). Det gir oss en enkel oppskrift på å fortsette den høyre tallrekken i tabellen: 2,3,4 ,5,7,9,12,16,21,28,37,49,65,... Denne tallfølgen har det vi kaller eksponensiell vekst. det samme fenomenet som for verdens befolkning. Den vokser fort, men ettersom befolkingen øker, vokser den enda fortere. Det motsatte av eksponensiell vekst er i denne forbindele polynomiell vekst. Polynomiell vekst er mye langsommere enn eksponensiell vekst, f.eks. har følgen av naturlige tall, 1,2,3,4,5,6,7,... polynomiell vekst.
Språket som vi har beskrevet over er det som i matematisk terminologi kalles elementene i den ***Projektive modulære gruppa, PSL(2,Z).*** Det vi har vist, eller i det minste antydet, er at denne gruppa har eksponensiell vekst.
La oss minne om Gromovs resultat fra 1981:

Teorem (Gromov, 1981)
En endeliggenerert gruppe G har polynomiell vekst hvis og bare hvis den er virtuelt nilpotent.

Ved å bruke dette resultatet kan vi nå slutte at den projektive modulære gruppa ikke er virtuelt nilpotent. Og hva så? Det er ikke enkelt å forklare hva det betyr at en gruppe er virtuelt nilpotent. Vi har ikke engang forklart hva vi mener med begrepet gruppe. Men for matematikere som jobber med gruppeteori er det veldig viktig å vite om en gruppe er virtuelt nilpotent eller ikke. Det vi prøver å fortelle med dette er at ved å kombinere litt enkel telling med Gromovs teorem, kan vi si noe helt grunnleggende og viktig om gruppa PSL(2,Z).