Abelprisen 2009

Geometri - Mikhail Gromovs lekegrind

Det norske Videnskaps-akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2009 til Mikhail Leonidovich Gromov, IHÉS, Bures-sur-Yvette, Frankrike, *for hans revolusjonerende bidrag til geometri.* Den russisk-franske matematikeren Mikhail L. Gromov er en av vår tids mest betydningsfulle matematikere. Han er kjent for å ha gitt viktige bidrag til flere matematiske områder, dog spesielt geometri. Gjennom de siste 30 år har Gromov bidratt med dype og originale ideer av stor generalitet. Ideer som har gitt oss helt nye perspektiver på geometri og andre områder av matematikk.

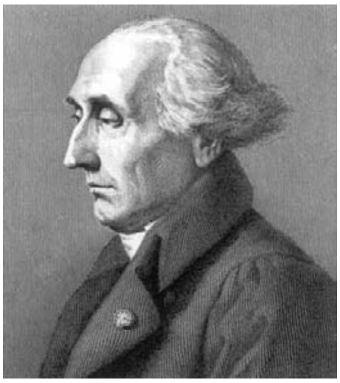
Riemannsk geometri

Gromovs hovedinteresse ligger innenfor fagfeltet differensialgeometri. Differensialgeometri er den delen av geometri der objektene man studerer er glatte og gjerne krumme, slik som kurver, flater eller høyere-dimensjonale mangfoldigheter. Objektene kan gjerne ha en tilleggsstruktur, f.eks. en Riemannsk metrikk. En Riemannsk metrikk på en flate er akkurat det ekstra verktøyet vi trenger for å kunne måle avstander og vinkler på flaten. En flate med en Riemannsk metrikk kalles en Riemannsk flate. Den vanligste metrikken på en flate er den Euklidske metrikken, og bak det navnet skjuler seg vårt vanlige avstandsbegrep. Men la oss nå forestille oss at flaten er en del av et landskap og at metrikken uttrykker hvor tungt det er å bevege seg i enhver retning i ethvert punkt på flaten. I myrlendt område er verdien av metrikken stor sammenliknet med områder med fast grunn. Forskjellige verdier av metrikken i forskjellige retninger i ett og samme punkt kan også forekomme, igjen avhengig av grunnen. En avstand mellom to punkter i denne metrikken gir oss et uttrykk for hvor lang tid eller hvor mye krefter vi bruker på å bevege oss mellom de to punktene.

Et av de mest fundamentale begrepene hva gjelder Riemannske flater er den såkalte Gausskrumningen til flaten. Begrepet ble først studert av Leonhard Euler (1707-1783), men det var Carl Friedrich Gauss (1777-1855) som utviklet teorien. Et plan med den vanlige Euklidske metrikken har ingen Gausskrumning, mens samme planet med hvor-vanskelig-er-det-å-gå-metrikken som beskrevet ovenfor, kan være ganske krumt! I dag finnes det mange krumningsbegreper og -definisjoner, og alle har som sin hovedoppgave å måle hvor langt et rom er fra å være flatt.

Gausskrumningen i et punkt på en flate er definert som produktet av hovedkrumningene i punktet, summen av dem kalles middelkrumningen. Hovedkrumningene er maksimums og minimumsverdiene av krumningen til de plane kurvene vi får når vi snitter flaten med plan som står normalt på tangentplanet i punktet.

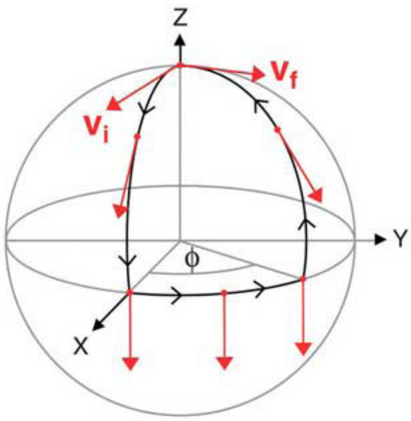
De viktigste egenskapene til en flate er de som er definert intrinsikt, dvs. definert kun gjennom avstander på flaten som er målt langs kurver på flaten. Flater blir ofte definert som grafen til en funksjon i to variable og før Gauss definerte man krumning ved hjelp av denne funksjonen. Egenskaper ved flaten som er definert på denne måten kalles ekstrinsike, det motsatte av intrinsike. Gauss viste i sitt Theorema Egregium ("Oppsiktsvekkende teorem") at til tross for den opprinnelige ekstrinsike definisjonen, så er Gausskrumning en intrinsik egenskap. Bernhard Riemann (1826-1866) generaliserte dette til høyere dimensjoner og la med det grunnlaget for det som i dag kalles Riemannsk geometri.



Den franskitalienske matematikeren Joseph-Luis Lagrange (1736-1813) stilte i 1760 følgende spørsmål: Gitt en lukket kurve i rommet, hvordan ser flaten ut som har denne kurven som sin rand og som har minimalt areal? En slik flate kalles en minimalflate. Svaret på spørsmålet ble gitt av den litt mer ukjente matematikeren Jean Baptiste Meusnier (1754-1793) 16 år senere. Han viste at en flate er

minimal hvis og bare hvis middelkrumningen til flaten er 0. Minimalflater opptrer på en naturlig måte i naturen. Ved å dyppe en ståltråd formet som den aktuelle kurven ned i såpevann, vil såpefilmen som dannes når vi tar tråden opp av vannet beskrive minimalflaten som svarer på spørsmålet. Kurver på en flate som er slik at de danner den korteste veien mellom sine endepunkter kalles geodesiske kurver. De svarer til rette linjer i et euklidsk rom. Matematisk beskrives de gjennom partielle differensiallikninger som oppstår fra såkalt variasjonsregning og de er intrinsikt definert, dvs. uavhengig av rommet som flaten er puttet inn i.

En måte å definere Gausskrumning i et punkt er å se på grenseverdien for kvotienten av avviket mellom vinkelsummen $\alpha + \beta + \gamma$ og π, og arealet av suksessivt mindre og mindre geodesiske trekanter, med vinkler α, β, γ og som omslutter punktet. Kvalitativt sier vi at flaten er positivt eller negativt krummet i henhold til tegnet på differensen $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ for små trekanter. En kuleflate har overalt positiv krumning siden vinkelsummen i en trekant på jordoverflaten er større enn π, mens plangeometri ikke krummer siden vinkelsummen som kjent er π eller 180 grader i det tilfellet.

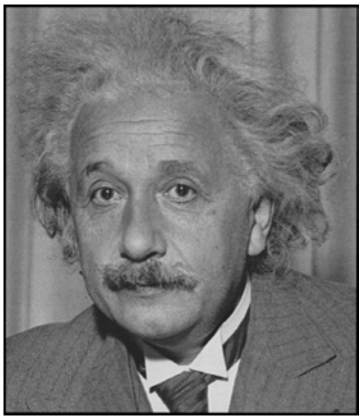


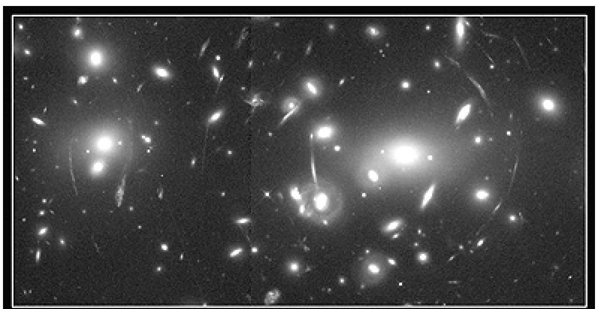
Siden en Riemannsk flate har en veldefinert krumning i hvert eneste punkt, har det mening å summere opp alle krumningene for å finne gjennomsnittskrumningen for hele flaten, eller totalkrumningen som den kalles i litteraturen. Totalkrumningen er beskrevet i et vakkert resultat, kjent som Gauss-Bonnet-teoremet. Resultatet sier at totalkrumningen kan bereg-

nes kun ved hjelp av topologiske egenskaper til flaten, dvs. uten verken å kjenne krumning eller metrikk. For en lukket flate, slik som kuleflaten eller overflaten til en smultring, kjent som en torus, sier Gauss-Bonnet at den totale krumningen er lik 4π minus 4π ganger antall hull i flaten. Kuleflaten har ingen hull og den totale krumningen er derfor lik 4π, for øvrig samme tall som arealet til kuleflaten når radius er satt til å være 1. Torusen har ett hull og den totale krumningen er derfor 0. Denne relasjonen mellom det lokale begrepet krumning og det globale begrepet antall hull har vært forløper for mange viktige resultater i geometri, med Atiyah-Singers indeksteorem som det absolutte høydepunkt. Michael Atiyah og Isadore Singer fikk Abelprisen for dette resultatet i 2004.

Etter hvert som man utvikler mer matematikk dukker det opp nye spørsmål og problemstillinger. I den gaten vi nå er inne i kom raskt spørsmålene opp om hva slags flater det er mulig å konstruere dersom vi krever at krumningen er null overalt, eller hvis den er konstant og positiv eller konstant og negativ? Svarene på disse spørsmålene vil hjelpe oss med å klassifisere alle flater. Mikhail Gromov har vært en svært aktiv bidragsyter i dette arbeidet og har gjennom sine resultater på en fremragende måte styrket vår kunnskap om flater og høyere-dimensjonale mangfoldigheter.

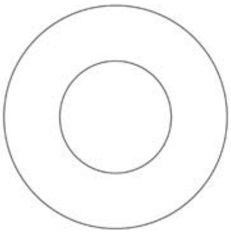
Riemannske geometere begrenser seg på ingen måte til å studere flater. Universet vårt kan beskrives som et tre-dimensjonalt rom. I nærheten av jorda ser dette rommet ut som et Euklidsk rom, dvs. at rette linjer er rette linjer, hvis vi kan formulere det slik. Andre steder i universet, i nærheten av kjempestjerner eller sorte hulle er dette langt i fra tilfellet. Gjennom Hubble-teleskopet har man observert fjerne punkter hvor det ikke bare er én geodesisk kurve mellom punktene og Hubble-teleskopet, men et helt knippe av slike. Dette kalles gravitasjonal brytning og er en avansert form for dobbelsyn. Ett og samme punkt opptrer tilsynelatende flere ganger på himmelhvelven når vi ser på det i teleskopet. Bakgrunnen for fenomenet er at vårt rom er krumt og ved å kombinere astronomiske observasjoner med teoretiske resultater fra Riemannsk geometri kan vi beregne størrelsen på denne krumningen. Astronomene forestiller seg at krumningen av rommet er relatert til gravitasjonsfeltene rundt kjempestjernene eller de sorte hullene i henhold til en partiell differensiallikning introdusert av Albert Einstein (1870-1955). Dermed kan man faktisk beregne massen til de sorte hullene som forårsaker den gravitasjonale brytningen.





Gravitational Lens in Abell 2218 HST · WFPC2

Som nevnt ovenfor kan man lage mange forskjellige metriske strukturer på én og samme flate. Gromov stilte seg spørsmålet om det er mulig å finne alle slike strukturer og til og med gi denne mengden noen form for struktur. Svaret hans er at mengden av alle metriske rom selv er et metrisk rom. Vi kan altså definere en avstand mellom to ulike metriske rom. Gromov gjør dette ved å legge de to rommene vi skal sammenlikne inn i et felles større rom og så måler han avstanden mellom dem der. Avstanden mellom to kompakte delmengder av et metrisk rom er gitt som den minste lengden som er slik at vi fra et vilkårlig punkt i den ene mengden alltid kan nå den andre mengden. Gromov-Hausdorff-avstanden mellom to metriske rom er akkurat denne minste lengden når vi optimaliserer det å legge rommene inn i et tredje større rom. Som et eksempel kan vi se på to sirkler med radius 1 og 2. Det er mange måter å tegne disse sirklene på et ark, men lar vi de få felles sentrum så vil avstanden mellom dem være 1. Fra et hvert punkt på den ene sirkelen kan vi nå den andre med en rett linje av lengde 1. Dermed blir Gromov-Hausdorff-avstanden mellom de to sirklene lik 1. Rundt 1980 publiserte Gromov en rekke resultater om det metriske rommet av metriske rom. To av resultatene bærer også hans navn, Gromovs kompakthetsteorem og Gromovs konvergensteorem.



Symplektisk geometri

I 1833 introduserte den irske matematikeren William Rowan Hamilton (1805-1865) det som i dag kalles Hamiltonsk mekanikk. Det er en måte å reformulere klassisk mekanikk etter Newton, motivert av en tidligere reformulering som Lagrange sto for i 1788. For Lagrange var klassisk mekanikk gitt som løsningen av en bestemt andre-ordens differensiallikning på et aktuelt koordinatrom. Hamilton endret formalismen, ved at han så på to sett av koordinater, posisjon og momentum, med hvert sitt sett av koordinater. Lagranges andre-ordens differensiallikning på et n-dimensjonalt rom ble nå erstattet av to første-ordens likninger på et 2n-dimensjonalt faserom. Egenskaper ved dette faserommet ble rendyrket og brukt som motivasjon til å definere sympektiske mangfoldigheter. Eller i matematisk språkdrakt, som mangfoldigheter utstyrt med en ikke-degenerert differensiabel toform.

Det er nære forbindelseslinjer mellom symplektiske strukturer og det som kalles nesten komplekse strukturer. Sammenhengen ligger i spørsmålet; er det mulig å forstå en 2n-dimensjonal reell mangfoldighet som en n-dimensjonal kompleks mangfoldighet, på samme måte som de komplekse tallene kan oppfattes som et to-dimensjonalt reelt rom?

La oss dvele litt ved en liten digresjon, pinneleken til velkjente Ole Brumm. Sammen med vennene sine kaster han pinner i elva fra den ene siden av brua og så løper de til den andre siden for å se hvilken pinne som kommer først. Strømmen i elva kan beskrives ved et bestemt vektorfelt, til hvert punkt på vannoverflaten tilordner vi en vektor som beskriver strømmens retning og styrke. Pinnene følger dette vektorfeltet langs det som kalles integralkurver. For Ole Brumm er det om å gjøre å finne den raskeste veien, eller i det minste en raskere vei enn det Christopher Robin, Tigergutt og Tussi finner. Uansett er det opplagt at pinnen finner veien til den andre siden av brua. Grunnen til det er at strøm-vektorfeltet har helt spesielle, og meget hensiktsmessige egenskaper. Vi kan etterape disse egenskapene, i fagterminologien kalt Cauchy-Riemanns likninger, og anvende dem på det symplektiske faserommet for Hamiltonformalismen vi beskrev over. Det vi da får er en spesiell måte å legge de komplekse tallene inn i en symplektisk mangfoldighet; de beskriver en type kurver som kalles J-kurver eller pseudoholomorfe kurver. Disse kurvene ble introdusert av Gromov i 1985 og revolusjonerte studiet av symplektiske mangfoldigheter. Spesielt

ga de opphav til Gromov-Witten-invarianter og Floer-homologi og spiller en prominent rolle i strengteori, kanskje det hotteste feltet i teoretisk fysikk de siste årene.

Geometriske grupper

I begrunnelsen for årets Abelpristildeling legger den faglige komiteen spesielt vekt på tre områder hvor geometeren Gromov har spilt en framtredende rolle. Riemannsk og symplektisk geometri kan man forstå hører med til tumleplassen for en av verdens ledende geometere, men hva har polynomial vekst av grupper med geometri å gjøre?

Vi skal avdekke en forbindelse, og vi begynner med å stille spørsmålet om hvor mange ord språket vårt inneholder? Det er selvfølgelig ingen god ide å starte å telle ord i et språk, men likevel, la oss forsøke. Vi starter med å betrakte ord av lengde 1, slik som i, ø og å. Hvis vi er litt strenge med hva vi mener med et ord så er det vel ikke flere enn disse. Lista over ord av lengde to er mye lenger; vi har to, ku, så, ta og hi for å nevne noen. Vi skal ikke fortsette på disse listene, vi skal heller forandre spillereglene og fokusere på et språk som viser seg å inneholde en veldig viktig matematisk konstruksjon. Her er reglene:

1. Alfabetet inneholder kun to bok¬staver, x og y.
2. Alle kombinasjoner av x´er og y´er er ord i dette språket, med to unntak, kombinasjonene xx og yyy skal ikke forkomme.

La oss nå telle antall ord i ordboken. Vi teller opp ord av samme lengde, og begynner med 1. I tabellen under har vi listet alle de korteste ordene, sortert etter lengde. La nå W(n) betegne antall ord av lengde n. Et elementært kombinatorisk argument (som vi ute¬later av plasshensyn) gir at W(n) er lik summen W(n-1)+W(n-5). Det gir oss en enkel oppskrift på å fortsette den høyre tallrekken i tabellen: 2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49,65,... Denne tallfølgen har det vi kaller eksponentiell vekst, det samme fenomenet som for verdens befolkning. Den vok¬ser fort, men ettersom befolkingen øker, vokser den enda fortere. Det motsatte av eksponentiell vekst er i denne forbindelse polynomial vekst. Polynomial vekst er mye langsommere enn eksponentiell vekst, f.eks. har følgen av naturlige tall, 1,2,3,4,5,6,7,... polynomial vekst.

Språket som vi har beskrevet over er det som i matematisk terminologi kalles elementene i den Projektive modulære gruppa, PSL(2,Z). Det vi har vist, eller i det minste antydet, er at denne gruppa har eksponensiell vekst. La oss minne

Lengde	Ord	W(n)
1	x,y	2
2	xy, yx, yy	3
3	xyx, yyx, yxy, xyy	4
4	xyxy, xyyx, yxyx, yxyy, yyxy	5
5	xyxyx, xyxyy, xyyxy, yx¬yxy, yxyyx, yyxyx, yyxyy	7
6	xyxyxy, xyxyyx, xyyxyx, xyyxyy, yxyxyx, yxyxyy, yxyyxy, yyxyxy, yyxyyx	9

om Gromovs resultat fra 1981:

Teorem (Gromov, 1981)
En endelig generert gruppe G har polynomial vekst hvis og bare hvis gruppa er virtuelt nilpotent.

Ved å bruke dette resultatet kan vi nå utlede at den projektive modulære gruppa ikke er virtuelt nilpotent. Men hva så? Det er ikke enkelt å forklare hva det betyr for en gruppe å være virtuelt nilpotent. Vi har ikke engang beskrevet hva det er å være en gruppe. Men for gruppeteoretikere er det viktig å vite om en gruppe er virtuelt nilpotent eller ikke. Det vi ønsker å fortelle med dette er at ved å kombinere enkel telling med Gromovs resultat kan vi uttale oss om betydningsfulle egenskaper til PSL(2,Z), en av de mest berømte gruppene i moderne matematikkhistorie.
Så tilbake til vårt opprinnelige spørsmål, om hva dette har med geometri å gjøre. Det er faktisk en metrikk gjemt i vårt språk-eksempel. Begrepet avstand har to helt grunnleggende egenskaper som vi ikke får lov å fravike, trekantulikheten og ekvivalensen mellom null-avstand og likhet. Trekantulikheten er en generalisering av det mer folkelige utsagnet om at den korteste veien mellom to punkter er den rette linje. Ekvivalensen mellom null-avstand og likhet sier at dersom det ikke er noen avstanden mellom to punkter så er de like. I det omtalte språket har det mening å sette sammen ord, ved å sette dem etter hverandre. Det at xx og yyy ikke er tillatt skal vi forstå dithen at dersom vi setter sammen to ord og en av disse kombinasjonene blir resultatet i ”skjøten”, så stryker vi dem. For eksempel vil sammensetningen av xyx og xyyx gi xyxxyyx=xyyyx=xx=Ø (vi kaller det tomme ordet for Ø). Vi skal også vrenge et ord, det gjør vi ved å snu ordet bak fram og erstatte yy med y og omvendt; for eksempel vil xyyxy vrenges til yyxyx. Det er nå en liten oppgave for leseren å sjekke at sammensetningen av et ord og det vrengte ordet gir oss det tomme ordet. Den oppsiktsvekkende erkjennelsen er nå at mengden av ord i dette alfabetet på en naturlig måte former et metrisk rom. Avstanden mellom to ord definerer vi ved å sette sammen det ene ordet med den vrengte versjonen av det andre og så telle opp antall bokstaver i resultatet. Denne definisjonen respekterer både trekantulikheten og ekvivalensen mellom null-avstand og likhet. Opptelling av punkter innen en gitt avstand fra det tomme ordet er i perfekt analogi med det å beregne arealet av sirkler med den samme avstanden fra et bestemt punkt på en flate. Areal er en kvadratisk funksjon i radiusen, dvs. for flater har vi polynomial vekst av grad 2. Tilsvarende argument kan vi bruke for generelle Riemannske mangfoldigheter av høyere dimensjon, dersom dimensjonen er d vil veksten i volum i d-baller om et punkt være en polynomial funksjon av grad d i radiusen til ballen. Igjen har vi polynomial vekst. Gromovs resultat kan i denne sammenhengen oppfattes å uttale seg om egenskaper ved algebraiske objekter svarende til endelig-dimensjonale mangfoldigheter.

Epilog
Gromovs navn er for alltid knyttet opp mot dype resultater og viktige begreper innen Riemannsk geometri, symplektisk geometri, strengteori og gruppeteori. Abelkomiteen sier i sin begrunnelse: ”Mikhail Gromov er alltid på leting etter nye spørsmål og etter nye svar på gamle spørsmål. Han har gjennom hele sin karriere produsert dype og originale arbeider og han er fortsatt bemerkelsesverdig aktiv. Gromovs arbeider vil fortsette å være en kilde til inspirasjon for mange framtidige oppdagelser.” Avslutningsvis tar vi også med et sitat fra Dennis Sullivan: ”Det er utrolig hva Mikhail Gromov kan få ut av trekantulikheten!”