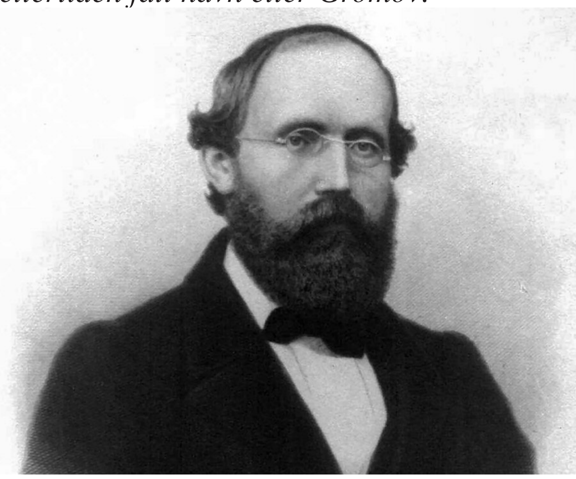
Abelprisen 2009

En introduksjon til noen av Mikhail Gromovs resultater

Abelkomiteens begrunnelse nevner spesielt tre områder hvor Mikhail Gromov i særdeleshet har spilt en framtredende rolle. Global Riemannsk geometri, symplektisk geometri og grupper av polynomiell vekst.

Riemannsk geometri

Komiteen sier: *Gromov spilte en avgjørende rolle i etablering av moderne global Riemannsk geometri. Hans løsninger av viktige problemer innen global geometri bygget på nye begreper, som konvergens av Riemannske mangfoldigheter og et kompakthetsprinsipp. Begge disse har av ettertiden fått navn etter Gromov.*



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemannsk geometri er oppkalt etter den tyske matematikeren Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann var student av den store Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

I forbindelse med sin ansettelse ved universitetet fikk Riemann i 1853 i oppdrag av Gauss å forberede en prøveforelesning om geometriens grunnlag. Riemann jobbet hardt i flere måneder og brukte anledningen til å utvikle en teori for geometri i høyere dimensjoner. Han holdt foredraget i Göttingen i juni 1854, foran et meget entusiastisk og imponert publikum. Foredraget skulle vise seg å bli et av de viktigste arbeidene innen moderne geometri. Tittelen for foredraget var *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (”*Om hypotesene som geometrien bygger på*”), og det ble publisert i artikkelform i 1868. Innholdet i dette arbeidet er det vi i dag kaller Riemannsk geometri. Riemannsk geometri er den delen av differensialgeometri som dreier seg om såkalte Riemannske mangfoldigheter. En Riemannsk mangfoldighet er en glatt mangfoldighet utstyrt med en Riemannsk metrikk, dvs. et kontinuerlig og glatt varierende indreprodukt på tangentrommet i hvert punkt. Metrikken gir oss lokale måledata som inkler, buelengder, areal og volum.

Gromov har ført den matematiske arven til Riemann videre. Han introduserte i 1980-årene det som nå kalles Gromov-Hausdorff-avstand mellom to metriske rom. Avstanden måles ved å legge de to rommene inn i et tredje, større rom og så gjøre sammenlikningen der. Gromov beviste to fundamentale resultater for denne konstruksjonen, et prekompakthetsteorem og et konvergensteorem.

Symplektisk geometri

Komiteen sier: Gromov er en av grunnleggerne av symplektisk geometri. Det var kjent at holomorfe kurver var et viktig verktøy i studiet av komplekse mangfoldigheters geometri. Imidlertid var det også klart at integrable komplekse strukturer utgjorde et for rigid rammeverk. I en berømt artikkel fra 1985 utvidet Gromov begrepet holomorfe kurver til J-holomorfe kurver på symplektiske mangfoldigheter. Dette ledet til teorien for Gromov-Witten-invarianter, som nå utgjør et ekstremt aktivt forskningsområde knyttet til moderne kvantefeltteori. Det ledet også til etableringen av feltet symplektisk topologi og har gradvis trengt inn i og omformet mange andre områder av matematikken.

Ordet ”*symplektisk*” er inspirert av ordet ”complex”, og introdusert av Hermann Weyl; tidligere

Abelprisen 2009

hadde ”symplektiske grupper” blitt kalt ”linje-komplekse grupper”. Ordet kompleks kommer fra latin com-plexus, som betyr ”flettet sammen” (co- + plexus), mens sympektisk kommer fra det tilsvarende greske ordet sym-plektos (συμπλεκτικός); i begge tilfeller kommer den siste stavelsen fra den indo-europeiske stavelsen *plek-. Navnsettingen reflekterer en dyp sammenheng mellom komplekse og symplekse strukturer.

Symplektisk geometri er grenen av differensial-geometri hvor objektene som studeres er symplektiske mangfoldigheter. En symplektisk mangfoldighet er en differensiabel mangfoldighet utstyrt med en lukket, ikke-degenerert 2-form. Symplektisk geometri har sin opprinnelse i den Hameltonske formalismen for klassisk mekanikk, der faserommet til et bestemt fysisk system på en naturlig måte antar en symplektisk struktur. Symplektisk geometri har mange fellestrekk, men skiller seg samtidig på vesentlige områder fra Riemannsk geometri. I motsetning til det Riemannske tilfellet har symplektisk geometri ingen lokale invarianter som f.eks. krumning. En annen forskjell er at ikke alle mangfoldigheter tillater en symplektisk struktur, det er visse topologiske begrensninger. Den viktigste er at en symplektisk mangfoldighet må være av jevn dimensjon og orienterbar. Symplektsik geometri kalles også symplektisk topologi, selv om symplektisk topologi egentlig er det underområdet hvor man studerer globale spørsmål innen symplektisk geometri.

Gromov utnyttet eksistensen av en nesten kompleks struktur på symplektiske mangfoldigheter til å utvikle teorien for pseudoholomorfe kurver. Denne teorien ga støtet til en rekke resultater innen symplektisk geometri, bla. oppdagelsen av det som nå kalles Gromov-Witten-invarianter. Disse invariantene spiller en viktig rolle i strengteori.

Grupper med polynomiell vekst

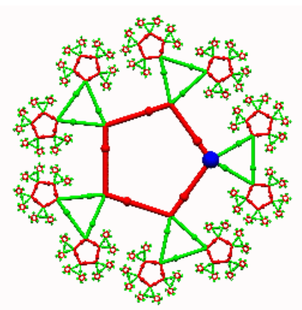
Komiteen sier: I sine studier av grupper av polynomiell vekst lanserte Gromov ideer som for alltid har forandret vår oppfattelse av diskrete uendelige grupper. Gromov oppdaget at diskrete grupper kan gis en geometrisk tolkning og løste flere problemer av sentral betydning. Hans geometriske tilnærming gjorde innviklede kombinatoriske argumenter mye mer naturlige og kraftfulle.

Innen gruppeteori betegner begrepet vekstrate til en gruppe med hensyn på en symmetrisk generatormengde veksten i antall “ord” i generatorene av økende lengde. Elementene i gruppa kan skrives som produkt av generatorer og vekstraten sier noe om hvor fort antall elementer som kan skrives som et produkt av lengde n øker med økende n.

Gromov beviste følgende teorem:

Teorem (Gromov 1981).
En endelig-generert gruppe G har polynomiell vekst hvis og bare hvis den er virtuelt nilpotent.

Det å ha polynomiell vekst er en geometrisk egenskap ved Cayley-grafen til gruppa, mens det å være nilpotent er en rent algebraisk egenskap. Det er ikke vanskelig å vise at nesten nilpotente grupper har polynomiell vekst; den vanskelige implikasjonen er den motsatte, og Gromov trengte å introdusere flere nye geometrisk begreper for å bli i stand til å oversette den geometriske informasjonen til algebraiske konklusjoner. Ideene hans har i ettertid etablert seg som basiskunnskap for ulike strategier for å løse vanskelige problemer innenfor dette området.



Cayley-grafen til $\mathbf{Z}_3$x$\mathbf{Z}_5$