Abelprisen 2008

Om hvorfor Jacques Tits er tildelt Abelprisen for 2008

Den vitenskapelige komiteens begrunnelse gir den presise bakgrunnen for hvorfor Tits er tildelt årets Abelpris for 2008. Men for en legmann kan det være nyttig med en viss utdyping.

I sin begrunnelse for tildelingen av årets Abelpris til ***Jacques Tits*** sier komiteen:

> *Tits created a new and highly influential vision of groups as geometric objects. He introduced what is now known as a Tits building, which encodes in geometric terms the algebraic structure of linear groups.*

I likhet med Thompson arbeider Tits med grupper, men på et punkt skiller de seg ad. Thompsons grupper er i hovedsak endelige, mens Tits studerer *lineære grupper*, som gjerne kan være uendelig store. I prinsippet er det ikke så stor forskjell på disse konstruksjonene. De tilfredsstiller det samme aksiomsystemet, og har derfor på elementnivå helt analoge algebraiske egenskaper. To beslektede eksempler på symmetrigrupper kan gi oss en pekepinn på forskjellen mellom endelige og uendelige grupper. I en sirkel tegner vi inn en regulær mangekant slik at alle hjørnene ligger på sirkelen. Regulære mangekanter er karakterisert ved at alle sider er like lange og alle vinkler er like store. En regulær n-kant har $2n$ symmetrier, n rotasjoner med den ene siden opp og n rotasjoner med den andre siden opp. Lar vi antall hjørner gå mot uendelig vil mangekanten *glattes* ut og vi får en sirkel. Det samme skjer med symmetriene, fra å være endelig mange i det *kantede* tilfellet får vi uendelig mange i det glatte. De lineære gruppene er nettopp av en slik natur. Tits skapte i sine arbeider på 60-tallet et geometrisk rammeverk for å beskrive denne type grupper. Gjennom et fabelaktig teoretisk system hvor han hentet navn til alle bestanddelene fra arkitekturen kunne Tits gi en geometrisk beskrivelse av rene algebraiske strukturer. Begrepsapparatet omfatter konstruksjoner som *bygninger, leiligheter* og *gallerier*, og alle konstruksjonene hjelper leseren til å etablere en visuell intuisjon for vanskelige algebraiske problemer.

Det viste seg snart at Tits-arkitekturen ikke bare var en spektakulær konstruksjon med kun teoretisk interesse. Komiteen trekker fram en rekke anvendelser hvor teorien har spilt en viktig rolle:

> *The theory of buildings is a central unifying principle with an amazing range of applications, for example to the classification of algebraic and Lie groups as well as finite simple groups, to Kac-Moody groups (used by theoretical physicists), to combinatorial geometry (used in computer science), and to the study of rigidity phenomena in negatively curved spaces.*

Et annet felt som komiteen trekker fram gir oss samtidig en forbindelse mellom de to prisvinnerne. Komiteen sier:

> *Tits's geometric approach was essential in the study and realisation of the sporadic groups, including the Monster.*

En annen av de sporadiske gruppene nevnes også ofte i forbindelse med Tits. Det er den såkalte *Janko-Hall gruppa*. Tits ga en beskrivelse av denne gruppa som automorfismegruppa til en graf med 100 hjørner og 1800 kanter. Den har 604 800 elementer og Tits omtalte dette antallet på følgende spøkefulle måte: *Ordenen 604 800 til Janko-Hall gruppa er det samme antallet som antall sekunder i en uke!*

Tits har også gitt navnet sitt til et annet begrep innen gruppeteori. Igjen låner vi komiteens formulering:

> *[Tits] also established the celebrated "Tits alternative": every finitely generated linear group is either virtually solvable or contains a copy of the free group on two generators. This result has inspired numerous variations and applications.*

En *virtuelt oppløsbar gruppe* er en gruppe som inneholder en oppløsbar undergruppe av endelig indeks, mao om den uendelige gruppa ikke er oppløsbar så finnes i det minste en undergruppe som er oppløsbar, og denne undergruppa er stor nok i forhold til den store gruppa. *Frie grupper* er grupper hvor det ikke finnes noen relasjoner mellom generatorene, så det å inneholde en fri gruppe på to generatorer innebærer at gruppa inneholder minst to elementer som er totalt uavhengig av hverandre og hvor alle potenser av elementene er forskjellige. Alternativt kan vi dermed formulere Tits-alternativet ved at dersom en gruppe er så innfløkt at vi ikke kan finne to generatorer som er totalt uavhengige, både av hverandre og seg selv, så er i det minste en undergruppe av gruppa, som er nesten like stor som gruppa selv (endelig indeks), oppløsbar. Dette er også et dypt og kraftfullt resultat som på en fabelaktig måte er med på å klargjøre gruppestrukturens innerste og mest hemmelighetsfulle vesen.