Abelprisen 2008

Løsning av Rubiks kube på sekunder ved hjelp av gruppeteori

Fra tid til annen dukker Rubiks kube opp og går som en farsott over landet. Mange av oss blir offer for et kjøpepress og setter oss ned noen timer og prøver å vri på plass de fargede sideflatene. Til slutt gir vi opp. Det er tilsynelatende helt umulig å få alle de blå på en side, samtidig som de oransje skal holde sammen og de røde og de gule skal finne sine plasser på kuben.

Men vi har ikke før lagt bort kuben før det dukker opp en student på nyhetene som løser problemet på 20 sekunder. ”Ja vel”, tenker vi, sånne studenter er jo veldig skarpe og så aksepterer vi at de får det til uten at vår egen selvtillit får en knekk. Når vi i tillegg legger til for vårt eget forsvar at de sikkert har kastet bort massevis av verdifull tid på å lære seg dette, stiger selvaktelsen, ja vi er mest ut sagt litt stolte av oss selv for at vi ikke kaster bort tid på slikt tull. Men den lille nysgjerrigheten blir liggende igjen i hjernebarken. Hvordan får de det egentlig til? Så dukker det opp en kinesisk treåring i Tripp-trapp-stol som snurrer kuben rundt på en-to-tre og fornuften sier oss at her må det finnes et system. Løsningen ligger i en enkel anvendelse av gruppeteori.
Rubiks kube inneholder en fast kjerne som resten av delene er hengslet på. Det eneste vi ser av denne kjernen er de seks midtfeltene på hver side av kuben. Seks felt med hver sin farge. Hvert av disse seks feltene sitter ytterst på en arm hvor de omkransende 8 ”småkubene” lar seg rotere rundt armen. Kuben har til sammen 3 x 3 x 3 = 27 småkuber, hvorav 7 sitter fast i kjernen og 20 er bevegelige. Av disse 20 er 8 hjørner og 12 midtfelt. Hjørne-småkubene har tre synlige sider, mens midtfelt-småkubene har to. En symmetri av kuben, dvs en sammensetning av ulike rotasjoner, må ta hjørnekuber på hjørnekuber og midtfelt på midtfelt. Når vi bytter rundt på hjørnene, så åpner det seg et stort antall muligheter. Det første hjørnet kan plasseres på 8 forskjellige steder, dvs. i et hvilket som helst av de andre hjørnene. Når første hjørne er plassert er det 7 muligheter for neste, deretter 6 osv. I alt gir dette 8! muligheter for hvert hjørne. I tillegg kan hjørnene vris på tre forskjellige måter. Tilsvarende får vi 12! muligheter for midtfeltene og også her har hvert midtfelt to mulige orienteringer. Nå viser det seg at ikke alle disse permutasjonene er mulige, så antallet må reduseres med en faktor 12. Det gir totalt

$$\frac{1}{12}\, 8!\, 3^8 12! 2^{12} = 43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$$

lovlige symmetrier for Rubiks kube. Disse symmetriene danner en gruppestruktur som vi kan kalle *Rubiks gruppe*. Som et apropos til klassifikasjonen av endelige simple grupper kan det nevnes at denne gruppa ikke er simpel, men bygget opp av de simple gruppene A_{12}, A_8, 7 kopier av $\mathbf{Z}_3$ og 12 kopier av $\mathbf{Z}_2$.
Nøkkelen til en rask løsning av Rubiks kube er å kjenne til bestemte undergrupper av Rubiks gruppe. En enkeltrotasjon av kuben endrer på 20 av de 48 bevegelige feltene og fikserer de øvrige 28. Setter vi sammen flere enkeltrotasjoner på en fornuftig måte kan vi øke antallet fikserte felt. Det er dette kubeløserne er så gode til. De kjenner til og husker sekvenser av rotasjoner som fikserer et stort antall felt, og som derfor kan brukes til å bytte rundt på kun et lite antall feilplasserte farger, uten at resten av de rett plasserte feltene forrykkes. Den gruppeteoretiske beskrivelsen av dette er ikke spesielt komplisert. En helt annen sak er å kunne utføre de riktige sekvensene av rotasjoner som skal til for å løse kuben. Rubiks kube er slik sett et godt eksempel på at teori og praksis er to forskjellige ting, i tillegg til å være en fabelaktig anvendelse av gruppeteori.