Abelprisen 2008

Et historisk utsyn over gruppeteorien

Årets Abelpris er ikke bare en pris til John Thompson og Jacques Tits. Den er også en anerkjennelse av det arbeidet hundrevis av gruppeteoretikere har gjort gjennom flere generasjoner. Vi skal ta et lite overblikk over denne historien, og se på noen betydningsfulle milepæler og deres opphavsmenn.

Utviklingen av gruppeteori som forskningsfelt har pågått i omlag 200 år, men selve begrepet *abstrakt gruppe* er noe yngre. Det var matematikere som ***Arthur Cayley***, ***Camille Jordan*** og ***Walther von Dyck*** som først mot slutten av den 19. århundrede utviklet den formelle definisjonen som vi kjenner i dag. Selv navnet gruppe var lenge ikke avklart, ***Augustin Louis Cauchy*** brukte den atskillig tyngre betegnelsen *konjugat-system av substitusjoner,* men etter en avhandling fra Jordans hånd fra 1863 ble begrepet gruppe allment akseptert. Da var det godt rundt 30 år siden mannen som først lanserte gruppebegrepet, ***Evariste Galois***, ble drept i en duell, bare 20 år gammel. Galois var politisk aktiv under revolusjonen i Frankrike i 1830 og den omtalte duellen var ikke nødvendigvis det den ga seg ut for, en kamp mellom unge, franske hjerter om en kvinnes gunst. Kanskje var det heller en vel regissert forestilling, satt i scene av Galois sine politiske motstandere for å bli kvitt en brysom opponent. Men uansett motiver, i henhold til myten satt den unge Galois kvelden før duellen og skrev ned sitt matematiske testamente. I dette grunnlaget for det som siden er blitt kalt Galois-teori, studerte Galois løsninger av polynomiale likninger, og permutasjoner av dem. Dette viste seg å være svært fruktbart i forhold til å kunne si noe om muligheten for å finne formler som beregnet løsningene. Dette arbeidet var en videreføring og en generalisering av Abels tidlige arbeider hvor han viste at man ikke kan finne noen algebraisk formel for å beregne løsningene til en generell femtegradslikning. I sine arbeider skrev Galois om en *gruppe av permutasjoner*, uten å definere hva han la i begrepet, ei heller å gi noen generelle egenskaper. For han var det bare en samling av permutasjoner. Men han har et veldig viktig poeng, han sier

> *... hvis man i en slik gruppe har substitusjonene S og T, så har man også substitusjonen ST.*

Dette viser at Galois bakte en struktur inn i begrepet gruppe, nemlig at sammensetningen (eller produktet) av to elementer i gruppa fortsatt skulle være med i gruppa. Vi ville sagt at gruppa er lukket under den binære operasjonen. I tiden etter Galois´ død jobbet flere av datidens mest betydningsfulle matematikere videre med gruppebegrepet. Både Cauchy og Jordan ga sine bidrag, men den første som forsøkte å gi en abstrakt definisjon av en gruppe var Cayley i 1854. Imidlertid var det ikke før von Dyck skrev sin artikkel i 1882 at det begrepsmessige innholdet i definisjonen av en abstrakt gruppe ble endelig fastlagt slik vi kjenner det i dag.

Det var imidlertid ikke kun permutasjoner og løsning av likninger som ga gruppeteorien den legitimitet som matematisk teori den har i dag. Minst like viktig var den geometriske innfallsvinkelen. Mengden av symmetrier til et geometrisk objekt danner på en naturlig måte en gruppe. F.eks. kan symmetriene til en sirkel framstilles som en blanding av speilinger og rotasjoner, og tilsvarende med symmetriene til et kvadrat. Forskjellen er at symmetrigruppa til sirkelen er uendelig stor. En annen geometrisk innfallsvinkel sto den norske matematikeren ***Sophus Lie*** for i 1884. Inspirert av sin landsmann Abels idé om å forstå ligninger og deres løsninger gjennom studier av permutasjoner av røttene, tok Lie for seg differensiallikninger og stilte seg omtrent det samme spørsmål. I likhet med Abel grep Lie tak i fundamentale sider ved sammenhengen mellom geometri og algebra og hans transformasjonsgrupper er i dag bedre kjent under navnet *Lie-grupper*.

Selv om det verken var Abel eller Lie som oppfant gruppeteorien har de begge fått store og viktige klasser av grupper oppkalt etter seg, abelske grupper og Lie-grupper. Men enda en norsk matematiker har fått æren av å gi navn til en stor klasse grupper.

Høsten 1862 var Universitetet i Christiania nødt til å finne en vikar som kunne undervise matematikk på høyere nivå. Professor ***Ole Jacob Broch*** var valgt som stortingsrepresentant og skulle møte i Stortinget. I hans sted ble ***Ludwig Sylow*** hentet inn til hovedstaden fra den høyere skolen i grensebyen Halden, 150 kilometer sør for Christiania. Sylow var ferdig utdannet noen år tidligere, men i mangel på stillinger ved Universitetet tok han en post ved *Fredrikshalds Lærde og Realskole*. Under sitt vikariat foreleste Sylow blant annet over Cauchys teorem om eksistens av undergrupper av prim orden, for primtall p som deler ordenen til gruppa. Sylow stilte forsamlingen på 6-7 studenter, inkludert Sophus Lie, spørsmålet om dette resultatet kunne generaliseres til maksimale potenser av primtallet p, altså om det alltid eksisterer undergrupper av orden p^n når denne potensen er den største potensen av p som deler ordenen til gruppa. Sylow hadde ikke noe svar på spørsmålet i 1862, men 10 år senere kunne han med stolthet publisere løsningen. Sylow beviste at det alltid finnes slike undergrupper og han kunne til og med gi antallet av dem, og ikke minst, vise at de er veldig nær beslektet. Det var bare rett og rimelig at disse maksimale undergruppene fikk navnet *Sylow-undergrupper*.

Det Sylow ikke visste, verken da han foreleste for Sophus Lie og hans medstudenter i 1862 eller da han publiserte sin 10 siders avhandling i 1872, var at dette lille resultatet skulle bli helt sentralt og et av de viktigste verktøyene i det store prosjektet innen gruppeteori som ble fullført mer enn 100 år senere, nemlig klassifiseringen av alle endelige grupper, inkludert oppdagelsen av de 26 sporadiske gruppene med *Monsteret* tronende på toppen som den siste gigantiske puslespillbrikken. Monsteret er navnet på den største sporadiske, endelige, simple gruppa og inneholder

808017424794512875886459904961710757005754368000000000

elementer.

Ved verdenskongressen for matematikere i Amsterdam i 1954 presenterte ***Richard Brauer*** sin visjon om å klassifisere alle endelige simple grupper. Nesten 30 år senere kunne nestoren i faget, ***Daniel Gorenstein*** konkludere med at prosjektet var avsluttet. Hundrevis av matematikere hadde da publisert tusenvis av sider i det som til sammen ga et bevis for klassifiseringen av alle endelige simple grupper. Midt i denne store forsamlingen av bidragsytere sto ***John G. Thompson*** for de mest avgjørende resultatene, spesielt det såkalte *Feit-Thompson-teoremet* som han beviste sammen med ***Walter Feit*** i 1962/63.

Klassifikasjonen av alle endelige simple grupper markerte ikke slutten på gruppeteorien, heller bare en ny begynnelse. Fra Galois brukte begrepet gruppe første gang, fram til det begrepsmessige innholdet i abstrakt gruppe var avklart, gikk det omlag 50 år. Deretter tok det nye 100 år før man hadde fastslått hvordan byggeklossene i denne teorien, de simple gruppene ser ut!

Samtidig med at arbeidet med klassifikasjonen av simple endelige grupper nådde de store høyder foregikk det også store ting rundt *lineære grupper*. I flere avhandlinger presenterte ***Jacques Tits*** sine bygninger, leiligheter og gallerier. Dette ga matematikere et helt nytt ståsted for å forstå lineære grupper. Dessuten er lineære grupper over endelige kropper også endelige og utgjør faktisk en egen klasse i klassifikasjonen av de simple gruppene.

De siste 30-40 årene, i tiden etter Feit-Thompson-teoremet og Bruhat-Tits-bygningenes spede barndom, har gruppeteorien fortsatt sine framganger. Stadig nye felt har dratt nytte av de kunnskaper som har blitt akkumulert gjennom de 200 årene med studier av matematikkens enkleste struktur. Et av de siste skudd på stammen er bruken av gruppestrukturen på elliptiske kurver over endelige kropper innen kryptografi. Og mer skal komme, gruppeteorien kommer aldri til å slutte å overraske.