John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg, Abelprisvinnere 2015

PARTIELLE DIFFERENSIALLIKNINGER - ET MATEMATISK UNIVERSALVERKTØY

Partielle differensiallikninger (eller forkortet PDE etter den engelske betegnelsen Partial Differential Equations) brukes for å beskrive grunnleggende lover for fenomener innen fysikk, kjemi, biologi og andre vitenskaper. De er også nyttige i analyse av geometriske objekter, slik en rekke vellykkede eksempler fra de siste tiårene viser. John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg har spilt en ledende rolle i utviklingen av denne teorien, gjennom løsning av fundamentale problemer og introduksjon av dype ideer.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) var foreldreløs, revolusjonær, rådgiver for Napoleon Bonaparte og endte opp som permanent sekretær for det franske videnskapsakademiet. Men han var hovedsakelig kjent som en meget innflytelsesrik matematiker og fysiker.

I 1822 publiserte Fourier resultatene av sin forskning i artikkelen *Théorie analytique de la chaleur* (Den analytiske teorien for varme). Her introduserte han varmelikningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

Funksjonen $u = u(t, \mathbf{x})$ måler temperaturen i et gitt punkt ved et gitt tidspunkt og likningen uttrykker en matematisk modell for varmetransport. Likningen uttrykker i matematisk formalisme det faktum at i et punkt hvor temperaturen er lavere enn gjennomsnittstemperaturen i omgivelsene, så vil temperaturen stige over tid. Varmelikningen tilhører en klasse av differensiallikninger som kalles parabolske.

De første streng-instrumenter hvor lyden ble frambrakt med en bue, skriver seg fra rytterkulturene i sentral-Asia, mens instrumentet vi i dag kjenner som fiolin ble utviklet i sør-Europa i renessansen av fabelaktige fiolinmakere som f.eks. Stradivari-familien. Fiolin-virtuosene trollbandt sitt publikum, mens vitenskapsmennene undret seg over hvordan strengene kunne skape den praktfulle lyden. I 1746 beskrev Jean le Rond d'Alembert den en-dimensjonale bølgelikningen og i løpet av det neste tiåret generaliserte Leonhard Euler likningen til tre dimensjoner. Bølgelikningen er en oversettelse til matematisk formalisme av dynamikken i en bølge, uttrykt ved

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0$$

hvor $u = u(t, \mathbf{x})$ gir amplituden til bølgefunksjonen og dens utvikling i tid og rom. Dersom vi betrakter en vibrerende streng eller en generell bølge, observerer vi at bølgen noen ganger ser ut som $\frown$ og andre ganger som $\smile$. I det første tilfellet har bølgen begynt å falle, mens den i det andre tilfellet vokser. Den matematiske modellen i dette tilfellet tilhører en klasse av partielle differensiallikninger som kalles hyperbolske.

De parabolske og de hyperbolske differensiallikningene er typiske modeller for dynamiske system, dvs. system som utvikler seg over tid. Forskjellen mellom dem er spredningshastigheten til løsningen. Det er mye mer liv i et system hvor det er farten, heller enn akselerasjonen som er frambrakt av konveksiteter i løsningen. Varme, modellert ved en parabolsk likning, vil forplante seg med uendelig hastighet. Alle deler av sølvskjeen er umiddelbart påvirket av den varme teen, selv om det tar litt tid før du brenner deg på fingrene. Bølger beveger seg med endelig hastighet, havet er fullstendig flatt før bølgen dukker opp.

John F. Nash, Jr. og Louis Nirenberg er i størst grad knyttet til en tredje klasse av differensiallikninger, de som kalles elliptiske PDE. De elliptiske differensiallikningene har mye til felles med de hyperbolske, men de skiller seg ad på et vesentlig punkt, nemlig om en av variablene i likningen er det vi kan kalle for tid-lig. I en elliptisk PDE er det ingen slike variable, alle variablene er sted-lige.

En elliptisk PDE vil typisk se ut som

$$\nabla^2 u = f$$

uten noen tids-koordinat involvert. Løsningen på likningen er fullstendig romlig, det dukker ikke opp noen tidsavhengighet. Elliptiske likninger vil derfor normalt modellere statiske fysiske eller geometriske problemer.

Abel-komiteen vektlegger den innflytelsen som prisvinnerene har hatt innenfor utviklingen av teorien for elliptiske PDE: *Betraktninger om regularitet forekommer daglig i studiet av partielle differensialligninger, noen ganger for å kunne gjennomføre stringente bevis, andre ganger på grunn av den verdifulle kvalitative innsikten som de gir om løsningene. Det var et gjennombrudd i området da Nash beviste, parallelt med De Giorgi, de første Hölder-estimatene for løsninger av lineære elliptiske ligninger i generelle dimensjoner, uten noen forutsetning om regularitet i koeffisientene. Blant andre konsekvenser ga dette en løsning på Hilberts 19. problem om analytisitet av funksjoner som minimerer analytiske elliptiske integral-funksjonaler. Få år etter Nash bevis etablerte Nirenberg, sammen med Agmon og Douglis, flere nyskapende regularitetsestimater for løsninger av lineære elliptiske ligninger med L^p-data som utvidet den klassiske Schauder-teorien og som er særdeles nyttige i anvendelser der slike integrerbarhetsbetingelser på dataene er oppfylt. Disse arbeidene grunnla den moderne teorien om regularitet, som siden har vokst umåtelig, med bruksområder innen analyse, geometri og sannsynlighetsregning, selv i svært ujevne, ikke-glatte situasjoner.*