THE ABEL PRIZE 2015

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen 2015 til **John F. Nash, Jr.**, Princeton University, og **Louis Nirenberg**, Courant Institute, New York University

«for slående og fruktbare bidrag til teorien for ikke-lineære partielle differensialligninger og deres anvendelser i geometrisk analyse.»

Partielle differensialligninger brukes for å beskrive grunnleggende lover for fenomener innen fysikk, kjemi, biologi og andre vitenskaper. De er også nyttige i analysen av geometriske objekter, slik en rekke vellykkede eksempler fra de siste tiårene viser.

John Nash og Louis Nirenberg har spilt en ledende rolle i utviklingen av denne teorien, gjennom løsning av fundamentale problemer og introduksjon av dype ideer. Deres gjennombrudd har utviklet seg til anvendelige og robuste teknikker, som nå er sentrale redskaper for studiet av ikke-lineære partielle differensialligninger. Deres innflytelse kan merkes i alle grener av teorien, fra fundamentale eksistensresultater til kvalitative studier av løsninger, både i glatte og ikke-glatte situasjoner. Deres resultater er også av interesse for den numeriske analysen av partielle differensialligninger.

Teoremer om isometrisk imbedding, som viser når det er mulig å realisere en iboende geometri som en delmengde av et euklidsk rom, har motivert noen av disse utviklingene. Nashs imbeddingsteoremer står blant de mest originale resultatene innen geometrisk analyse i det tjuende århundre. Ved å bevise at enhver riemannsk geometri kan realiseres som en glatt undermangfoldighet av et euklidsk rom, fastslår Nashs glatte (C^∞) teorem at Riemanns intrinsiske synspunkt er likeverdig med den tidligere ekstrinsike tilnærmingen. Nashs ikke-glatte (C^1) imbeddingsteorem, som ble forbedret av Kuiper, viser muligheten til også å realisere imbeddinger som først synes å forbys av geometriske invarianter som gausskrumning. Dette teoremet er sentralt i hele Gromovs teori om konveks integrasjon, og har også inspirert nylige spektakulære fremskritt innen forståelsen av regularitet av ikke-kompressibel væskeflyt. Nirenbergs fundamentale imbeddingsteoremer for sfæren S^2 i R^3, med foreskrevet gausskrumning eller riemannsk metrikk, løste de klassiske problemene til Minkowski og Weyl (det sistnevnte ble også samtidig behandlet av Pogorelov). Disse løsningene var viktige, både fordi problemene var representative for et område under utvikling, og fordi metodene som ble skapt var de riktige for videre anvendelser.

Nashs arbeid om å realisere mangfoldigheter som reelle algebraiske varieteter og Newlander og Nirenbergs teorem om komplekse strukturer illustrerer ytterligere hvilken innflytelse de to prisvinnerne har hatt innen geometrien.

Betraktninger om regularitet forekommer daglig i studiet av partielle differensialligninger, noen ganger for å kunne gjennomføre stringente bevis, andre ganger på grunn av den verdifulle kvalitative innsikten som de gir om løsningene. Det var et gjennombrudd i området da Nash beviste, parallelt med De Giorgi, de første Hölder-estimatene for løsninger av lineære elliptiske ligninger i generelle dimensjoner, uten noen forutsetning om regularitet i koeffisientene. Blant andre konsekvenser ga dette en løsning på Hilberts 19. problem om analytisitet av funksjoner som minimerer analytiske elliptiske integral-funksjonaler. Få år etter Nashs bevis etablerte Nirenberg, sammen med Agmon og Douglis, flere nyskapende regularitetsestimater for løsninger av lineære elliptiske ligninger med L^p-data, som utvidet den klassiske Schauder-teorien og som er særdeles nyttige i anvendelser der slike integrerbarhetsbetingelser på dataene er oppfylt. Disse arbeidene grunnla den moderne teorien om regularitet, som siden har vokst umåtelig, med bruksområder innen analyse, geometri og sannsynlighetsregning, selv i svært ujevne, ikke-glatte situasjoner.

Symmetriegenskaper gir også vesentlig informasjon om løsningene til ikke-lineære differensialligninger, både for kvalitative studier og for forenkling av numeriske beregninger. Et av de mest spektakulære resultatene på dette området ble oppnådd av Nirenberg i samarbeid med Gidas og Ni: De viste at hver positive løsning til en stor klasse av ikke-lineære elliptiske ligninger vil ha de samme symmetriene som dem som er til stede i ligningen selv.

I stedet for å være begrenset til løsningen av de problemene de ble skapt for å løse, har resultatene vist av Nash og Nirenberg blitt svært nyttige redskaper med bred anvendelse i ytterligere sammenhenger. Blant de mest populære av disse redskapene er Nirenbergs interpoleringsulikheter, inkludert Gagliardo-Nirenberg-ulikhetene, og John-Nirenberg-ulikheten. Sistnevnte bestemmer hvor langt en funksjon av begrenset middels oscillasjon (BMO) kan avvike fra sitt gjennomsnitt, og uttrykker den uventede dualiteten mellom BMO-rommet og Hardy-rommet H^1. Nash-De Giorgi-Mosers regularitetsteori og Nashs ulikhet (først bevist av Stein) har blitt sentrale redskaper i studiet av probabilistiske semigrupper i alle slags sammenhenger, fra euklidske rom til glatte mangfoldigheter og metriske rom. Nash-Mosers inverse funksjonsteorem er en kraftig metode for å løse perturbative ikke-lineære partielle differensialligninger av alle typer. Den store betydningen som både Nash og Nirenberg har hatt for den moderne redskapskassen innen ikke-lineære partielle differensialligninger kan ikke fullt ut dekkes her, men Kohn-Nirenbergs teori om pseudo-differensialoperatorer må også nevnes.

I tillegg til at de hver for seg er betydelige skikkelser innen analysen av partielle differensialligninger, har Nash og Nirenberg påvirket hverandre gjennom sine bidrag og sin samhandling. Konsekvensene av den fruktbare dialogen som de begynte i 1950-årene ved Courant Institute of Mathematical Sciences, er i dag mer merkbare enn noen gang.