THE ABEL PRIZE 2020

Rekurrens av virrevandring i $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}^2$, men ikke i $\mathbb{Z}^3$

Anta at vi på et gitt tidspunkt er i stand til å beskrive hvert enkelt gassmolekyl i en lukket beholder, med posisjon og hastighet. Umiddelbart etter dette gylne øyeblikket i historien vil gassmolekylene fortsette å bevege seg rundt i beholderen, kollidere med hverandre og med veggene. Det kan virke nokså paradoksalt at gassen en gang i framtiden skulle vende tilbake til nøyaktig samme tilstand som vi observerte tidligere, men ifølge Henri Poincarè's rekurrens-teorem fra 1890 er dette akkurat det som skjer. Man kan sammenligne det med det faktum at hvis man skriver opp bokstaver i en tilfeldig rekkefølge, vil man på et tidspunkt, ved et rent slumpetreff ha skrevet en fullstendig korrekt versjon av "Et Dukkehjem" av Henrik Ibsen. Det kan ta tid, men før eller senere vil det skje.

Siden Poincarè presenterte sine resultater for 130 år siden har mange matematikere gitt sine bidrag til teorien. Et skikkelig matematisk fundament ble lagt av Birkhoff i 1930, med det såkalte ergodisitets-teoremet. Teoremet sier at for en mål-bevarende avbildning på et endelig dynamisk system vil i ha rekurrens for (nesten) alle startpunkter.

Som en illustrasjon av rekurrens-fenomenet kan vi se på virrevandringer på $\mathbb{Z}^n$ for $n = 1, 2, 3$, med uniform sannsynlighetsfordeling.

Vi betrakter en uniformt distribuert virrevandring langs $\mathbb{Z}$. Vi starter i x, og vil i neste trinn komme til $x + 1$ med sannsynlighet $\frac{1}{2}$ og til $x - 1$ med samme sannsynlighet. La $M \in \mathbb{Z}$, og anta for enkelhets skyld at $M > 0$. For alle $0 < x < M$ kan vi spørre: Hvilket tall når vi først i vår vandring, 0 eller M? La $m(x)$ betegne sannsynligheten for at vi når M først. Hva skjer da i neste steg? Med sannsynlighet $\frac{1}{2}$ kommer vi til $x + 1$, der sannsynligheten for å nå M først er $m(x + 1)$, og med den samme sannsynlighet flytter vi til $x - 1$, der den tilsvarende sannsynligheten er $m(x - 1)$. Det følger at

$$\frac{1}{2}m(x-1) + \frac{1}{2}m(x+1) = m(x)$$

med randbetingelse $m(0) = 0$ og $m(M) = 1$. Løsningen til denne differenslikningen er gitt ved $m(x) = \frac{x}{M}$. Sannsynligheten for å nå 0 først er da $1 - \frac{x}{M}$. Anta nå at vi ikke kommer til 0 i det hele tatt. Det er det samme som at vi kommer til et hvert tall M før vi kommer til 0, dvs. $m(x) = \frac{x}{M} = 1$ for alle $M \in \mathbb{Z}$ og vilkårlig utgangspunkt x. Dette er selvfølgelig umulig, noe som betyr at vi med sikkerhet vil returnere til 0.

Vi kan beregne sannsynligheten for at vår virrevandrer kommer tilbake til 0 etter $2n$ skritt (det må nødvendigvis være et partall). Ved å bruke tallene i Pascals trekant finner vi at sannsynligheten for å returnere etter $2n$ skritt er

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Dette tallet kan approksimeres for store verdier av n ved å bruke Sterlings formel. Sterlings formel sier at

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, som da gir

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \simeq \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

La p være sannsynligheten for at vi returnerer til 0. Da er sannsynligheten for å returnere nøyaktig n ganger gitt ved $p^{n-1}(1-p)$. Forventningsverdien av denne fordelingen er gitt ved

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}(1-p) = \frac{1}{1-p}$$

Forventningsverdien for antall returer til 0 kan også uttrykkes som summen av forventningsverdiene for nøyaktig en retur etter $2n$ skritt;

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Denne summen divergerer og det følger at $1 - p = 0$.
Vi kan samme argument til å vise rekurrens også i $\mathbb{Z}^2$. I det tilfellet kan vi vende tilbake til 0 i to retninger, dvs. sannsynligheten er gitt ved

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n}$$

Igjen har vi at

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}$$

som divergerer og $1 - p = 0$.
Hvis vi fortsetter å øke rangen og ser på $\mathbb{Z}^3$, observerer vi at rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi n})^3}$$

nå konvergere og vi får $p \neq 1$, noe som betyr at vi ikke kan være sikre på at vi vender tilbake til 0. Faktisk gir beregninger at sannsynligheten for å vende tilbake til utgangspunktet er $p = 0.3405$ eller 34 prosent.