ABEL PRISEN

Abelkomitéens begrunnelse, med utdypende forklaringer

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2011 til

John Willard Milnor

Institute for Mathematical Sciences, Stony Brook University, New York

«for banebrytende oppdagelser innenfor topologi, geometri og algebra».

Milnors arbeid er i sin helhet preget av fremragende forskning: dyp innsikt, levende fantasi, overraskelseselementer og enestående kvalitet.

Milnors oppdagelse av **eksotiske glatte sfærer i sju dimensjoner** var fullstendig uventet. Oppdagelsen var forløperen for **differensialtopologien** og førte til en eksplosjon av arbeider fra en hel generasjon fremragende matematikere. Denne eksplosjonen har vart i flere tiår og har endret hele matematikklandskapet. Sammen med **Michel Kervaire** arbeidet Milnor videre og gav en fullstendig fortegnelse over alle distinkte **differensiable strukturer** på sfærer av alle dimensjoner. Spesielt viste de at den sjudimensjonale sfære har nøyaktig 28 distinkte differensiable strukturer. De var blant de første til å identifisere firedimensjonale mangfoldigheters spesielle egenart, og banet således veien for grunnleggende utvikling innenfor topologi.

Milnors motbevisning av den etablerte **Hauptvermutung** endret forventninger til **kombinatorisk topologi** som gikk tilbake til **Poincaré**. Milnor oppdaget også homeomorfe glatte mangfoldigheter med ikke-isomorfe tangentbunter, og i den forbindelse utviklet han teorien om **mikrobunter**. I tre-mangfoldighetsteori beviste han et elegant unikt faktoriseringsteorem.

I tillegg til topologi har Milnor gitt betydelige bidrag til **differensialgeometri**, algebra og **dynamiske systemer**. På hvert eneste område Milnor har hatt befatning med, har hans innsikt og tilnærminger hatt avgjørende betydning for senere utvikling. Hans monografi om **isolerte hyperflatesingulariteter** anses for å være det enkeltstående mest innflytelsesrike arbeidet innenfor singularitetsteori, og har gitt oss **Milnor-tallet** og Milnor-fibre.

Topologene begynte å bruke Hopf-algebraer og koalgebraer aktivt etter Milnors og **J.C. Moores** avgjørende arbeid. Milnor kom selv fram til ny innsikt i strukturen i Steenrod-algebraen (av kohomologioperasjoner) ved bruk av Hopf-algebraer. **I algebraisk K-teori** introduserte Milnor **grad to funktoren**; hans berømte formodning om funktoren – som til slutt ble bevist av Voevodsky – gav støtet til nye retninger i studiet av motiver i algebraisk geometri. Milnors innføring av **vekstinvarianten til en gruppe** knyttet kombinatorisk gruppeteori til geometri, og banet vei mot **Gromovs** teori om hyperbolske grupper.

Senere vendte John Milnor oppmerksomheten mot dynamiske systemer i lave dimensjoner. Sammen med **Thurston** var han en pioner i utviklingen av «**kna-teori**» for intervallavbildninger, hvorved det kombinatoriske grunnlaget for intervalldynamikk ble etablert, noe som skapte et fokus for intens forskning i tre tiår. Milnor–Thurston-formodningen om entropi-monotonisitet førte til forsøk på å forstå fullt ut dynamikken i den reelle kvadratiske familie. Dette dannet bro mellom reell og kompleks dynamikk på en dyptgående måte, og utløste meget interessante fremskritt.

Milnor er en fantastisk begavet formidler av avansert matematikk. Han har ofte taklet vanskelige, banebrytende emner som ikke tidligere har vært omhandlet i bokform. Med ny kunnskap har han frembrakt en rekke tidsmessige, og ikke minst varige arbeider som representerer overlegen innsikt. På samme måte som en musiker kan være en inspirert komponist og en karismatisk utøver, er matematikeren John Milnor både en oppdager og en formidler.

Tekst av **Arne B. Sletsjøe** (over)
Foto: **Anne Lise Flavik**

Forklaringer til ord og uttrykk I komitéens begrunnelse

Topologi

Topologi (fra det greske topos, «sted», og logos, «ord, mening») er en stor matematisk disiplin som befatter seg med ulike figurer, som kurver, flater legemer, osv. Topologer studerer egenskaper ved figurene som er uavhengig av kontinuerlige deformasjoner av figurene, slik som strekking, vridning og bøyning. Det er imidlertid ikke lov til å rive figurene i stykker eller lime sammen deler. Avstandsbegrepet er ikke vesentlig, heller ikke areal eller vinkler. En smultring og en kaffekopp med én hank er topologisk ekvivalente, dvs. at fra et topologisk ståsted skiller vi ikke mellom de to flatene. Topologi kalles av og til for gummistrikk-geometri. [tilbake]

Geometri

Geometri (fra gammelgresk, geo- «jord», -metri «måling») «Jord-måling» er den del av matematikken som befatter seg med spørsmål knyttet til form, størrelse, relativ posisjon av figurer og egenskapene til rommet. Geometri er en av de eldste vitenskapene. Forskjellen på topologi og geometri er måling. Den korteste avstanden mellom to punkter på en flate er en geometrisk egenskap, men ikke en topologisk. Strekker vi flaten slik at vi endrer avstanden mellom to punkter, så har vi endret geometrien til flaten, men ikke topologien. [tilbake]

Algebra

Algebra er den delen av matematikken som tar for seg regler for regneoperasjoner og relasjoner og konstruksjoner og begreper utledet fra dem. Dette inkluderer polynomer, likninger og algebraiske strukturer. Sammen med geometri, topologi, analyse og tallteori utgjør algebra grunnlaget for ren matematikk. [tilbake]

Eksotiske glatte sfærer i sju dimensjoner

En sfære i sju dimensjoner er en generalisering av den ordinære to-dimensjonale sfæren. Vi betrakter en sirkel som en en-dimensjonal sfære, og ved å fiksere to diametralt motsatte punkter og spinne sirkelen rundt i den neste dimensjonen, får vi en to-dimensjonal sfære. Vi kan gjøre det samme med en to-dimensjonal sfære, sette en fingertupp på nordpolen og en på sydpolen, og spinne sfæren rundt i en høyere dimensjon. Det gir oss en (ikke-visuell) tre-dimensjonal sfære. Dette fortsetter vi med til vi kommer til en sju-dimensjonal sfære.

En annen beskrivelse av sfærene går via symmetri. Sirkelen består av alle punkter i planet med en gitt avstand til et bestemt punkt, som vi kaller sentrum. Den to-dimensjonale sfæren er definert på samme måte, som alle punkter i rommet med gitt avstand til et sentrum. Den sju-dimensjonale sfæren består av alle punkter i et åtte-dimensjonalt rom med gitt avstand til et utvalgt sentrum.

Eksotiske sfærer er sfærer (i alle dimensjoner) utstyrt med en differensiabel struktur (se dette) som er forskjellig fra den vanlige strukturen. [tilbake]

Differensialtopologi versus differensialgeometri

Differensialtopologi og differensialgeometri er best beskrevet gjennom sine likheter og forskjeller. Likheten er at begge tar for seg egenskaper ved differensiable mangfoldigheter, dvs. objekter hvor begrepet tangent har mening og hvor det i tillegg er mulig å regne på hvordan de ser ut. Veldig ofte kan dette gjøres på flere forskjellige måter.

Fra ståstedet til differensialtopologen så er overflaten på en smultring og overflaten på en en-hanket kaffekopp like. Smultringen er tenkt laget i et elastisk stoff slik at vi uten å rive i stykker eller klistre igjen hullet kan omforme smultringen til en kopp med hank. Vi sier at vi har en global innfallsvinkel til beskrivelsen av legemet, siden det på denne måten er umulig å fastslå om to figurer er like bare ved å se på et lite utsnitt av dem. Vi må ha tilgang til hele figurene for å avgjøre om de er like. Tar vi differensialgeometriens utgangspunkt, så vil smultringen og koppen være forskjellige, siden det ikke er nok å snu på smultringen for å få en kopp. Dette er i og for seg også en global innfallsvinkel, men et viktig skille mellom de to disiplinene er at geometeren faktisk ikke trenger å se hele figurene for å se at de er forskjellige. Ved å studere krumningen i ulike punkter kan hun raskt fastslå at hanken er mye tynnere og har større krumning enn et hvert sted på smultringen. [tilbake]

Michel Kervaire

Michel André Kervaire (1927-2007) var en fransk matematiker som samarbeidet med John Milnor i arbeidet med å finne antallet eksotiske sfærer i høyere dimensjon enn fire. Han var professor ved Courant Institute ved New York University fra 1959 til 1971. Deretter var han professor ved Universitetet i Geneve fra 1971 til han ble pensjonist i 1997. [tilbake]

Differensiable strukturer

Det er mulig å definere differensiable struktur på mange forskjellige geometriske objekter, men vi skal bruke en vanlig sfære som vårt illustrerende eksempel. Lokalt, dvs. på en liten del av sfæren, er det å gi en differensiabel struktur, omtrent det samme som å tegne et kart over området. Vanskeligheten, i en matematisk forstand, er ikke å tegne kartet, men å få alle de enkelte kartene til å henge sammen slik at de dekker hele sfæren, eller jordkloden. Intuitivt virker ikke dette som noe problem, og det er det heller ikke på en vanlig sfære, men dersom man prøver å gjøre dette for en 7-dimensjonal sfære, med tilsvarende 7-dimensjonale kart, så må man gjøre valg underveis for å få det hele til å gå opp. Milnor og Kervaire beviste at det finnes 28 måter å gjøre dette på. En av dem er nokså rett fram, omtrent som i det to-dimensjonale tilfellet, mens de 27 andre er mye vanskeligere å beskrive. Milnor kalte disse 27 andre for eksotiske strukturer eller eksotiske sfærer. [tilbake]

Hauptvermutung

Die Hauptvermutung (tysk for hovedformodning) innen geometrisk topologi er formodningen (en antakelse som man tror er sann, men som enda ikke er bevist) som sier at dersom vi dekker en flate med trekanter på et svært regelbundet vis, og vi gjør dette på to forskjellige måter, ja så finnes det alltid en ytterligere oppdeling av de to trekant-oppdelingene, dvs. med mindre trekanter inne i de gamle, slik at de blir like. Steinitz og Tietze formulerte denne formodningen i 1908, men den ble avkreftet av Milnor for oppdelinger i høye dimensjoner i 1964. [tilbake]

Kombinatorisk topologi

Kombinatorisk topologi er det samme som i dag kalles algebraisk topologi. Opphavet til navnet skyldes at innen kombinatorisk topologi kutter man opp rom i enkeltbestanddeler for så å sette dem sammen igjen, gjerne på en annen måte. Hvor vidt dette er mulig koker ofte ned til et kombinatorisk spørsmål. Bakgrunnen for navneendringen skriver seg fra inspirasjon fra den tyske matematikeren Emmy Noethers pionerarbeid innen homologi-teori, og kan dateres nokså nøyaktig ved hjelp av et par interne notat i den franske Bourbaki-gruppa. I 1942 omtales topologien som kombinatorisk, mens etter 1944 brukes uttrykket algebraisk topologi. [tilbake]

Henri Poincaré
Jules Henri Poincaré (1854-1912) var fransk matematiker, teoretisk fysiker, ingeniør og naturvitenskapsfilosof. Han beskrives ofte som den siste universalist siden han publiserte innen omtrent alle felt av matematikken som eksisterte på hans tid. Poincaré er mannen bak Poincaré-formodningen, en av de mest berømt, og lengst-levende, uløste matematiske problemer. Han er også en av grunnleggerne av topologi. [tilbake]

Mikrobunt
En mikrobunt er en generalisering av begrepet vektorbunt. I likhet med vektorbunter inneholder mikrobunter to rom, totalrommet og baserommet, og en projeksjonsavbildning fra det ene på det andre. Mikrobunter har en tilleggsstruktur, i det de er utstyrt med en avbildning den motsatte veien, kalt en nullseksjon. Fibrene til projeksjonsavbildningen, dvs. alle punkter i totalrommet som avbildes på ett og samme punkt i baserommet, er til forveksling lik vanlige vektorrom. Subtiliteten i å konstruere mikrobunter, eller også vektorbunter, ligger i å få alle de enkelte fiberne, som hver for seg ser ut som et vektorrom, til å passe sammen til det store totalrommet. Det kan virke enkelt helt fram til den siste brikken skal på plass. Da må alt stemme hvis ikke hele prosjektet skal falle sammen. Det er i denne siste brikken at mikrobunter og vektorbunter avslører sin sanne, og dype, matematiske natur. [tilbake]

Dynamiske systemer
Et dynamisk system er en modell for tidsutviklingen av et fysisk (eller matematisk) system. Som eksempler kan man nevne de matematiske modellene som beskriver varmetransport i en metallstang, fysiske data for atmosfærene som grunnlag for moderne værvarsling og utvikling av en populasjon over tid. På et gitt tidspunkt befinner systemet seg i en tilstand og det dynamiske systemet gir en deterministisk (mao. kun én mulig utvei) regel for hvordan systemet utvikler seg til framtidige tilstander. [tilbake]

Isolerte hyperflate-singulariteter
Når vi spaserer langs en vei vil vi til enhver tid befinne oss i ett av to forskjellige typer punkter. Den ene typen er de regulære punktene, der vi ikke har noen valg mht. hvor vi skal gå. Disse er alltid i flertall. Men vi må også passere singulære punkter, av typen veikryss, hvor vi har flere muligheter å velge mellom. Singulariteter, som abstrakt matematisk begrep, er en generalisering av veikryssene. Isolerte singulariteter innebærer at de singulære punktene ikke hoper seg opp, det er alltid mange regulære mellom to singulære, og forstavelsen hyperflate- er en teknisk betegnelse på hvordan singulariteten er definert. [tilbake]

J. C. Moore.
John Coleman Moore (1927-) er amerikansk matematiker, hvis mest siterte publikasjon er om Hopf-algebraer, skrevet sammen med John Milnor. [tilbake]

Milnortall
Det finnes generelt mange typer isolerte singulariteter, selv for kurver og flater. Et nyttig verktøy til å karakterisere singulariteter er å bruke deres Milnortall. Vi legger singulariteten inn i en sfære av passende dimensjon, dvs. en mer enn dimensjonen til singulariteten. Snittet av rommet som inneholder singulariteten og sfæren vil se ut som en bukett av sfærer av lavere dimensjon. Antallet slike sfærer kalles Milnortallet til singulariteten. Et regulært punkt har Milnortall 0, og jo høyere Milnortall, jo mer komplisert singularitet. [tilbake]

Algebraisk K-teori
K-teori er et generelt verktøy for å klassifisere objekter, innen mange ulike matematiske fagområder. Verktøyet ble oppfunnet av den franske matematikeren Alexander Grothendieck på andre halvpart av 1950-tallet. Algebraisk K-teori er den algebraiske varianten av dette generelle verktøyet. [tilbake]

Grad-2-funktoren
Grad-2-funktoren og den tilhørende Milnor-formodningen dreier seg om en meget teoretisk, og lite tilgjengelig i daglig-språk, relasjon mellom to forskjellige uttrykk som uttaler seg om egenskaper ved «en kropp av karakteristikk forskjellig fra 2». Relasjonen knytter sammen Milnors K-teori og Galoiskohomologi. Milnor brukte sin intuisjon til å formulere sammenhengen, men klarte ikke å bevise resultatet. Problemet sto uløst i mer enn 20 år, inntil Vladimir Voevodsky presenterte et bevis rundt 1996. [tilbake]

Vekstraten til en gruppe
De mest grunnleggende algebraiske objektene kalles grupper. Grupper opptrer i mange anvendelser, i nesten alle matematiske underdisipliner, i fysikk, kjemi og arkitektur, for å nevne noen. Abelprisen for 2008 ble tildelt John Thompson og Jacques Tits for deres fremragende prestasjoner innenfor algebra, og særlig for utformingen av moderne gruppeteori.
En måte å angi størrelsen på en gruppe er å beregne vekstraten til gruppa. Vi starter med et minimalt sett av generatorer for gruppa, dvs. elementer som til sammen kan gi oss alle andre elementer i gruppa. Vekstraten er et uttrykk for redundansen i denne mengden. Små grupper hvor vi trenger mange gruppeelementer for å lage alle andre har lav vekstrate, mens en gruppe der elementene som genererer hele gruppa er veldig uavhengige har høy vekstrate. Dette er tilfellet for de såkalte frie gruppene. Abelprisen for 2009 ble tildelt Mikhail Gromov, delvis på bakgrunn av hans arbeid med vekstrater til grupper. [tilbake]

Mikhail Gromov
Mikhail Leonidovich Gromov (1943-), er en russisk-fransk matematiker kjent for å ha kommet med viktige bidrag innen mange matematiske felt. Han omtales som «geometer med veldig stor bredde», og han fikk Abelprisen i 2009. [tilbake]

William Thurston
William Paul Thurston (1946-) er amerikansk matematiker. Han regnes som en av pionerene innen feltet som kalles lav-dimensjonal topologi. Han fikk Fields-medaljen i 1982 for sitt bidrag til forståelsen av 3-mangfoldigheter. Han er for tiden professor i matematikk og beregningsvitenskap ved Cornell University. [tilbake]

Milnor-Thurstons kna-teori
Milnor-Thurstons kna-teori har ingenting med brødbaking å gjøre, men dreier seg om å analysere utfallet av å repetere spesielle avbildninger av et intervall inn i seg selv. Kna-navnet henspeiler på at intervallet legges over seg selv og knas sammen og at vi gjentar denne prosessen mange ganger. Teorien ble utviklet av John Milnor og William Thurston i to Princeton-preprints som i ettertid ble svært innflytelsesrike og lest i store kretser av matematikere. Arbeidene ble revidert i 1981 og endelig publisert i 1988. Kna-teorien har vist seg å ha mange interessante anvendelser.
[tilbake]