THE ABEL PRIZE 2020

To tallteoretiske problemer som kan løses med metoder fra ergode-teori, Szemerédis teorem and Oppenheims formodning.

Det første problemet dreier seg om aritmetiske progresjoner. En aritmetisk progresjon er en følge av hele tall med fast differanse. Mengdene $\{5, 8, 11, 14, 17\}$ og $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ er to eksempler på aritmetiske progresjoner. Den første har lengde 5 og differanse 3, mens den andre er uendelig lang og har differanse 2. La $A \subset \mathbb{Z}$ være en mengde av hele tall. Basert på et arbeid fra 1936 av de to ungarske matematikerne Paul Erdős og Pál Turán er det blitt formulert en formodning om at en mengde med positiv tetthet vil den inneholde aritmetiske progresjoner av vilkårlig lengde.

Tettheten til en mengde A reflekterer sannsynligheten for at et tilfeldig valgt heltall ligger i A. Den formelle definisjonen er som følger:

Definisjon. En mengde A av heltall har positiv øvre tetthet dersom

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap \{-N, \ldots, N\}|}{2N+1} > 0$$

Mengden $2\mathbb{Z}$ har tetthet 2 og en endelig mengde har tetthet 0. Også uendelige mengder kan ha tetthet 0, slik tilfellet er for primtallene.

Erdős-Turán-formodningen ble bevist første gang i 1975 av Endre Szemerédi, ved bruk av kombinatoriske argumenter. Szemerédi ble i 2012 tildelt Abelprisen for dette resultatet.

Teorem (Szemerédi, 1975). La $k \geq 1$ være et helt tall, og la A være en mengde av heltall med positiv øvre tetthet. Da inneholder A en ikke-triviell aritmetisk progresjon av lengde k.

To år etter dette, i 1977 kom Furstenberg med et nytt bevis for formodningen, via det som i dag kalles Furstenbergs rekurrens-teorem.

Teorem (Furstenberg, 1977). La $k \geq 1$ være er helt tall, $(\mathbb{Z}, \chi, \mu, T)$ et mål-bevarende system på $\mathbb{Z}$ og $E \subset \mathbb{Z}$ en mengde av positivt mål. Da finnes det et tall $r > 0$ slik at

$$E \cap T^{-r}E \cap \cdots \cap T^{-(k-1)r}E \neq \emptyset$$

Szemerédis teorem følger fra Furstenbergs rekurrens-teorem ved å la E svare til mengden A og la T være operatoren $x \mapsto x+1$ på $\mathbb{Z}$. Hvis A ikke inneholder noen aritmetiske progresjoner av lengde k, så vil snittet

$$A \cap T^{-r}A \cap \cdots \cap T^{-(k-1)r}A = \emptyset \quad \text{for alle } r > 0$$

Hvis snittet ikke hadde vært tomt, så ville vi kunne finne elementer $a_0, \ldots, a_{k-1}$ i A slik at

$$a_0 = a_1 - r = a_2 - 2r = \cdots = a_{k-1} - (k-1)r$$

Men da ville

$$a_{k-1}, a_{k-2} = a_{k-1} + r, \ldots, a_0 = a_{k-1} + (k-1)r$$

være en aritmetisk progresjon i A av lengde k, som jo motsier konklusjonen i Furstenbergs rekurrens-teorem.

Det andre problemet vi skal se på omtales som Oppenheims formodning, oppkalt etter den britiske matematikeren Alexander Oppenheim. Formodningen dreier seg om rasjonale løsninger av kvadratiske likninger. Et gammelt resultat av A. Meyer fra 1884 sier at en stor klasse av kvadratiske likninger (svarende til indefinitte kvadratiske former) i 5 eller flere variable og med heltallige koeffisienter må ha rasjonale løsninger.

Teorem (A. Meyer, 1884). La Q være en indefinitt kvadratisk form i 5 eller flere variable over de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$. Hvis

$$Q(x) = 0$$

har ikke-trivielle løsninger i $\mathbb{R}$, så vil den også ha ikke-trivielle løsninger i $\mathbb{Z}$.

Teoremet er ikke sant hvis vi bare holder oss til 4 variable. Se på den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - p(x_3^2 + x_4^2),$$

hvor p er et primtall som er kongruent med 3 modulo 4. Likningen $Q = 0$ har åpenbart reelle løsninger, men ingen hektallige løsninger. Det er nemlig slik at et kvadrattall enten er kongruent med 0 modulo 4 eller kongruent med 1 modulo 8. Anta at x_1, x_2, x_3, x_4 ikke har noen felles faktor. Da er minst en av dem kongruent med 1 modulo 8, og det er lett å se at det ikke finnes noen løsning av kongruensen $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, modulo 8. Men da kan det heller ikke finnes heltallige løsninger.

Oppenheim stilte opp en hypotese om at kvadratiske likninger i samme klasse, men med mer generelle koeffisienter og i 3 eller flere variable kan approksimeres med rasjonale tall. Den presise formuleringen av Oppenheims formodning er som følger:

Formodning (Oppenheim, 1929). La Q være en reell ikke-degenerert indefinitt kvadratisk form i 3 eller flere variable. Anta at Q ikke er et multiplum av en form med rasjonale koeffisienter. Da eksisterer det for hver $\epsilon > 0$ en ikke-triviell rasjonal vektor $\mathbf{x}$ slik at $|Q(\mathbf{x})| < \epsilon$.

Denne formodningen er ikke sann for kvadratiske likninger i to variable; la α være et algebraisk tall som er løsning av en kvadratisk likning med heltallige koeffisienter. Da eksisterer det et reellt tall C slik at $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{C}{q^2}$ for et vilkårlig rasjonalt tall $\frac{p}{q}$. Betrakt så den kvadratiske formen $Q(x, y) = \alpha^2 x^2 - y^2$. For hele tall p, q har vi

$$\begin{aligned} |Q(p,q)| &= |\alpha^2 p^2 - q^2| \\ &= |(\alpha x - y)(\alpha x + y)| \\ &\geq \frac{C}{x}|\alpha x + y| \\ &\geq C|\alpha| \end{aligned}$$

som viser at formodningen ikke kan være sann for kvadratiske former i to variable

Oppenheims formodning ble bevist av Margulis i sin fulle generalitet i1987. Hans bevis baserer seg på metoder fra ergode-teori.