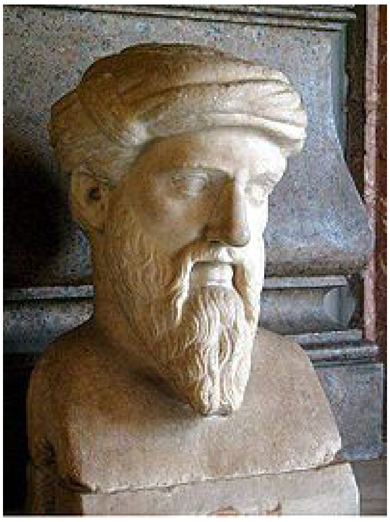
Abelprisen 2010

Tallteori: John T. Tates matematiske lekegrind

Algebraiske heltall, endelige kropper, p-adiske tall. Klassekroppteori, rigide analytiske rom, elliptiske kurver. Dette er noen av begrepene man må kjenne til når oppgaven er å beskrive John Tates matematiske landevinninger. John Tate er årets Abelprisvinner. Hvis du aldri har hørt om disse ordene, kan du likevel dele noe med en av de mest briliante vitenskapsmenn i vår tid: Fascinasjonen for de naturlige tallene. Ved førtse øyekast framstår de som uskyldige og lett tilgjengelige. Telling 1, 2, 3, ..., og regning, 1+2=3, 3+5=8, er noe små barn behersker. Men etter hvert som du lærer mer om dem, oppdager du at den verdenen du er i ferd med å dykke ned i er enorm, mystisk og ikke så rent lite uforutsigbar.

"Matematikk er vitenskapenes dronning og tallteori er matematikkens dronning."

Carl Friedrich Gauss



"Alt er tall."

Pythagoras of Samos

"Gud skapte de naturlige tallene, resten er menneskets verk."

Leopold Kronecker

Abelprisen 2010

Tallteori er studiet av egenskapene til alle tall, men spesielt hele tall.
Disiplinen kan deles i mange underdisipliner, klassifisert etter hva slags metoder som benyttes og hva slags problemstillinger som undersøkes.

Elementær tallteori
Innen elementær tallteori studeres heltallene uten å involvere teknikker fra andre matematiske områder.
Blant viktige resultater innen dette området kan nevnes Fermat's lille teorem, Euler's teorem, det kinesiske restteoremet og den kvadratiske resiprositetssatsen.

Algebraisk tallteori
Innen algebraisk tallteori utvides tallbegrepet til også å omfatte algebraiske tall, dvs. løsninger av polynomiale likninger med rasjonale koeffisienter.
Disse tallmengdene inneholder elementer som er analoge med heltallene, de såkalte algebraiske heltallene, og de er de vi i første rekke studerer.
Mange tallteoretiske problemstillinger kan angripes ved å redusere problemene modulo p for varierende primtall p. Denne lokaliseringsprosedyren leder oss til konstruksjonen av p-adiske tall som er et annet hovedtema innen algebraisk tallteori.

Analytisk tallteori
Analytisk tallteori tar i bruk verktøy fra kalkulus og kompleks analyse for å håndtere spørsmål knyttet til de hele tallene. Eksempler er primtallssatsen om den asymptotiske oppførselen til primtallene og Riemann-hypotesen. Bevisene for at π og e er transcendente inngår også i analytisk tallteori.

Aritmetisk algebraisk geometri
Aritmetisk (algebraisk) geometri er studiet av skjemaer av endelig type over spektret til ringen av hele tall.

Diofantisk geometri
Diofantisk geometri er studiet av algebraiske mangfoldigheter over tallkropper.

● John Tates interesser hører hovedsakelig inn under overskriften ***algebraisk tallteori.***

Kombinatorisk tallteori
Kombinatorisk tallteori tar for seg tallteoretiske problemstillinger som involverer kombinatoriske ideer enten i sin formulering eller sin løsning. Paul Erdös er hovedarkitekten bak denne retningen innen tallteori. Et eksempel på en problemstilling er jakten på aritmetiske progresjoner innen ulike tallmengder.

● Andre tallteoretiske underdisipliner

Modulære former
Modulære former er analytiske funksjoner på øvre halvplan som tilfredsstiller en bestemt type funksjonallikning og er underlagt en gitt vekstbetingelse.
Teorien for modulære former hører egentlig til innenfor kompleks analyse, men har tradisjonelt hatt sin viktigste berettigelse i sitt samspill med tallteori.

Abelprisen 2010

John Tates innflytelse på moderne tallteori kan best leses ut av det store antallet begrep og resultater som er oppkalt etter han:

Hodge-Tate teori; p-adisk analog av Hodge-dekomposisjonen for kompleks kohomologi.

Lubin–Tates formelle gruppelov er den entydige (1-dimensjonale) formelle gruppeloven F slik at $e(x) = px + x^p$ er en endomorfi for F, dvs. slik at $e(F(x,y)) = F(e(x), e(y))$.

Sato–Tate-formodningen er et statistisk utsagn om familien av elliptiske kurver E_p over den endelige kroppen på p elementer, hvor p er et primtall, og formet av en elliptisk kurve E over **Q** ved reduksjon modulo p for nesten alle primtall p.

Input i ***Tates algoritme*** en elliptisk kurve E over **Q** og et primtall p. Den svarer med eksponenten f_p til p i konduktøren til E, reduksjonstypen i p, og den lokale indeksen c_p.

Ved ***Serre-Tates teorem*** kan man kontrollere (deler av) karakteristikk-p-deformasjonene til et abelsk skjema som stammer fra den lokale delen av Barsotti-Tate-gruppa.

Barsotti-Tate-grupper; dukker opp “i naturen” når man betrakter sekvensen av kjerner til multiplikasjon med sukssessivt økende potenser av p på en abelsk mangfoldighet.

Tate-kohomologi er en modifisert utgave av vanlige kohomologigrupper for endelige grupper, som pakker sammen homologi og kohomologi i en sekvens.

Tate-modul; en Galois-modul konstruert fra en abelsk varietet.

Tates Isogeni-teorem sier at abelske varieteter med isomorfe Tate-moduler er isogene.

Tate-tvist; en spesiell abelsk gruppe med virkning av en Galois-gruppe konstruert via en kroppsutvidelse.

Tate-motivet er tensor-inversen til Lefschetz-motivet.

Tate-Shafarevich-gruppa (oppkalt etter Tate og Igor Shafarevich) til en abelsk varietet definert over en tallkropp K, består av de elementene i Weil-Châtelet-gruppa som trivialiseres i alle kompletteringer av K.

Néron–Tate-høyde (eller kanonisk høyde) er en kvadratisk form på Mordell-Weil-gruppa av rasjonale punkter på en abelsk varietet definert over en global tallkropp.

Honda-Tate-teori; klassifikasjon av abelske varieteter over endelige kropper opp til isogeni..

Abelprisen 2010

Et fundamentalt resultat innen tallteori sier at vi har entydig prim-faktorisering for heltall. I 1847 trode Gabriel Lamé at han hadde et bevis for Fermats siste teorem. Beviset bygget på at entydig primfaktorisering generaliseres til vilkårlige algebraiske utvidelser av de rasjonale tall. Lamé ble nokså umidelbart irettesatt av Joseph Liouville som henviste til et resultat av Ernst Kummer fra 1843, der dette problemet ble behandlet.
Denne lille disputten i 1847 ble opphavet til et helt felt innen tallteori, et felt hvor John Tate har vært en sentral person de siste 50 årene.

Aritmetikkens fundamentalteorem

Aritmetikkens fundamentalteorem (eller entydig primtallsfaktoriseringssatsen) sier at et hvert heltall større enn eller lik 1 kan skrives på en entydig måte som et produkt av primtall (opp til faktorenes rekkefølge). Intuitivt karakteriserer dette primtallene som tallsystemets byggesteiner. Resultatet ble i praksis bevist av Euklid, men et første fullstendig utskrevet bevis finner vi i Disquisitiones Arithmeticae av Carl Friedrich Gauss.

Primfaktorisering i algebraiske tallkropper

Bakgrunnen for all tallteori er mengden av hele tall, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., betegnet med **Z**. Heltallene er en del av de rasjonale tallene **Q**, dvs. mengden av alle brøker. Det reelle tallet $\sqrt{2}$, definert som den positive roten av den polynomiale likningen $x^2-2=0$, er ikke et rasjonalt tall, et faktum som var kjent for pythagoreerne allerede 400 år f. Kr. Likefult er vi interessert i å studere egenskapene til $\sqrt{2}$, og metoden vi skal bruke er å utvide **Q** med $\sqrt{2}$ og dermed konstruere en større algebraisk tallkropp. Denne tallkroppen betegner vi med **Q**($\sqrt{2}$), og den består av alle tall på formen $a+b\sqrt{2}$, der a og b er rasjonale tall.
Tallet $\sqrt{2}$ er definert som løsningen av den polynomiale likningen $x^2-2=0$, og det er slik at alle tallene i tallkroppen **Q**($\sqrt{2}$) er løsning av polynomiale likninger. Ikke den samme likningen for alle, men minst en likning for hvert tall.
På samme måte som at alle heltall også er rasjonale tall, finnes det algebraiske heltall i en algebraisk tallkropp. Kravet til et tall for å bli omtalt som et algebraisk heltall er som følger; vi ser på det moniske polynomet som definerer tallet (monisk betyr at koeffisienten foran leddet av høyeste grad er 1). Dersom alle koeffisientene i polynomet er hele tall, sier vi at røttene er algebraiske heltall. Eksempler på algebraiske heltall i **Q**($\sqrt{2}$) er $\sqrt{2}$ (rot i polynomet x^2-2) og $1+\sqrt{2}$ (rot i x^2-2x-1).
En fundamental egenskap ved heltallene er entydig primtallsfaktorisering; det er kun én måte å skrive 105 som et produkt av primtall ($105=3\cdot5\cdot7$) når vi ikke bryr oss om rekkefølgen på faktorene. I en vilkårlig algebraisk tallkropp er ikke dette nødvendigvis tilfellet. Favoritteksemplet for (nesten) alle matematikere er utvidelsen av **Q** med kvadratroten av -5. (Hvis du har vonde følelser for kvadratrøtter av negative tall, bare lukk øynene og gå videre. Man blir etter hvert vant til det!) I denne utvidelsen, eller snarere i heltallsdelen av den, har tallet 6 to forskjellige primtallsfaktoriseringer

$$6=2\cdot3=(1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5})$$

Alle faktorer som inngår i disse produktene er primtall, dvs. de er bare delelige med 1 og seg selv.
I hvilken grad entydig faktorisering ikke slår til i en algebraisk heltallsring, beskrives av en bestemt størrelse som vi kaller en klassegruppe. Dersom denne klassegruppa er endelig, kaller vi antall elementer i den for klassetallet til den algebraiske utvidelsen. Klassetallet til en algebraisk tallkropp er altså 1 hvis og bare hvis den tilhørende algebraiske heltallsringen har entydig faktorisering. Størrelsen på klassetallet blir et mål på hvor langt den algebraiske heltallsringen er fra å ha entydig faktorisering.