Den første **Abel-prisen** er tildelt Jean-Pierre Serre, en av vår tids store matematikere. Serre er professor emeritus ved Collège de France i Paris. Han har gitt dyptgående bidrag til matematikkens utvikling i mer enn et halvt århundre, og han er fremdeles aktiv. Serre har hatt enorm betydning når det gjelder å gi mange deler av matematikken en moderne form, blant annet:

- *Topologi*, som er studiet av kurver, flater og mer generelle geometriske objekter. Her behandles spørsmålet: Hva forblir uendret i disse objektenes geometri selv om de strekkes eller tøyes? På hvilken måte kan vi si at ett geometrisk objekt er vesensforskjellig fra et annet? Med vesensforskjellig mener vi her at selv om begge objekter er så elastiske og så bøyelige som mulig, så vil vi ikke få dem til å se likedan ut uansett hvordan vi prøver å forme dem. Hvordan kan vi for eksempel si at de to knutene

er vesensforskjellige? Tenk deg at de er laget av tau. Uansett hva du gjør med dem (bortsett fra å klippe over tauet) får du dem ikke til å se helt like ut!

- *Tallteori*, som er studiet av tallenes grunnleggende egenskaper.
  - primtall (tall som kun er delelig med 1 og seg selv) og faktorisering
  - algebraiske tall (tall som er løsning av polynomlikninger)
  - spørsmål vedrørende tallenes plassering (f.eks. Catalans problem: De eneste etterfølgende perfekte potenser er $2^3=8$ og $3^2=9$)
  - spørsmål vedrørende beregninger (f.eks. hvis x er svært stor er det grovt regnet $\frac{x}{\log x}$ primtall som er mindre enn x)
  - løsninger av polynomer (f.eks. Fermats siste sats).

- *Algebraisk geometri*, som omhandler forbindelsen mellom algebra og geometri. Dette treffer vi på allerede i den analytiske geometrien som undervises på videregående skole, gjennom studier av f.eks. sirkler, parabler, ellipser og hyperbler, de såkalte kjeglesnitt. Det er den grenen av matematikken som blant annet stiller de grunnleggende spørsmålene:
  - Hvordan framstiller vi geometrisk løsninger av systemer av polynomlikninger?

- Hvis vi har informasjon om geometrien, hva vet vi da om den underliggende algebraiske strukturen?

Mange av de grunnleggende resultatene innen disse disiplinene kan vi takke Serre for. Og dette er bare noen av områdene hvor Serre har bidratt. Vi skal se nærmere på to emner; topologi og tallteori. Topologiens moderne tidsalder ble innledet med arbeidet til Henri Poincaré i hans artikkelserie *Analysis Situs* fra 1895. Vi skal antyde noe om forbindelsen mellom dette arbeidet og Serres enestående bidrag innen algebraisk topologi. Vi regner ofte at algebraens og tallteoriens moderne tidsalder begynte med arbeidene til Gauss, Lagrange, Galois og Abel. Vi skal kort nevne forbindelsen mellom disse matematikerne og Serres bidrag til tallteorien.

Topologi: Serre utviklet revolusjonerende algebraiske metoder innen algebraisk topologi. For å få en idé om hvilke matematiske spørsmål som behandles i algebraisk topologi, kan vi tenke oss at vi har et geometrisk objekt *X.* Vi ønsker å finne de kvalitative egenskapene til objektet, det vil si de egenskapene som bevares selv om vi antar at det geometriske objektet er elastisk og ikke-stivt. Som et enkelt eksempel lar vi *X* være overflaten av en sykkelslange. Et slikt objekt, laget av gummi, kan strekkes og presses sammen. Vi skal se på de egenskapene ved flaten som ikke endrer seg når den utsettes for slike påkjenninger. Det betyr at lengdemål ikke blir regnet som en ekte "kvalitativ egenskap," for hvis slangen endrer form når gummien strekkes, vil lengder kunne endres. Henri Poincaré oppdaget imidlertid en interessant "kvalitativ egenskap" ved en slik flate. Han stilte følgende spørsmål: På hvor mange måter kan vi tegne en lukket kurve på denne flaten? Her anses to lukkede kurver på flaten for å være vesensforskjellig bare dersom det ikke lar seg gjøre å bringe den ene av dem over på den andre på en kontinuerlig måte.

I arbeidet med å klassifisere alle vesensforskjellige lukkede kurver på et geometrisk objekt *X*, fant man en kilde til den typen "kvalitative egenskaper" man var på jakt etter. Ved å svare på spørsmålet til Poincaré: "Hvor mange vesensforskjellige lukkede kurver er det på *X*?" kan vi i mange tilfeller skille mellom forskjellige objekter (hvis for eksempel *X* er overflaten av en ball, finnes det bare én slik kurve, mens på overflaten av en smultring, som figuren ovenfor viser, finnes det mange).

Finnes det andre "kvalitative egenskaper" som vil være mer følsomme verktøy når det gjelder å skille mellom, og forstå geometriske objekters iboende egenskaper? (Matematikere omtaler disse "kvalitative egenskapene ved *X*" som "homotopi-invarianter av *X*"). Et sted det vil være naturlig å lete etter flere og finere homotopi-invarianter, er i høyere-dimensjonale versjoner av Poincarés idé. I stedet for kun å betrakte Poincarés verktøy (lukkede kurver på *X*) kan vi betrakte vesensforskjellige høyere-dimensjonale objekter (av samme type) inneholdt i objektet *X*. Men hvilke høyere-dimensjonale objekter vil det være formålstjenlig å bruke som kilde til å finne kvalitative egenskaper?

En n-dimensjonal sfære er rommet av alle punkter med avstanden 1 fra origo i et (n+1)-dimensjonalt euklidsk rom. Sirkelen er den en-dimensjonale sfæren, den to-dimensjonale sfæren er overflaten av en ball osv. En lukket kurve på *X* danner vi ved å legge den en-dimensjonale sfæren (sirkelen) inn på *X* (ved hjelp av det som matematikere omtaler som en kontinuerlig avbildning).

Dette ledet matematikere til å betraktet mengden av vesensforskjellige kontinuerlige avbildninger av den n-dimensjonale sfæren på *X,* for *n*=1,2,3,…. Disse mengdene (definert på riktig måte) omtales som n-te homotopigruppe til *X* (for *n*= 1,2,3,…), og de kan betraktes som en rekke med store, gåtefulle "kvalitative egenskaper" ved det geometriske objektet *X*. Vi har brukt det matematiske begrepet *gruppe* for å signalisere at mengden som disse vesensforskjellige avbildningene utgjør, har en innviklet algebraisk struktur. Det er oppsiktsvekkende at når man leter etter "kvalitative egenskaper" i geometri, dukker det naturlig opp algebraiske objekter.

Det som er avgjørende for om homotopigrupper er et godt verktøy, er om det lar seg gjøre å beregne dem for viktige geometriske objekter og spesielt for sfærene selv. For hvert par av naturlige tall *n* og *m* vil et kjerneproblem være å beregne hvor mange vesensforskjellige avbildninger av den *n*-dimensjonale sfæren på den *m*-dimensjonale sfæren som finnes, og, noe som er mer krevende, hvilken struktur disse avbildningene har. Det finnes alltid én uinteressant kontinuerlig avbildning: projeksjonen av den *n*-dimensjonale sfæren på ett enkelt punkt på den *m*-dimensjonale sfæren. Men for mange par $n \geq m$ er det også mange *interessante* avbildninger, like intrikate som de er vakre, som bygger broer til algebra, ja endog til tallteori! Bortsett fra når $n = m$ eller $n = 2m-1$ vil antallet vesensforskjellige avbildninger fra den *n*-dimensjonale sfæren til den *m*-dimensjonale sfæren være endelig. Detaljert kunnskap om disse avbildningene er på mange måter nøkkelen til å kunne angripe og forstå et stort spekter av topologiske problemer.

Serre utviklet et algebraisk maskineri som gav nøyaktige svar på mange slike spørsmål, og som innledet en epoke med viktige framskritt innen algebraisk topologi. For å illustrere hvor innviklet, men dog så presist dette er, skal vi liste opp noen få konkrete eksempler: det finnes bare to vesensforskjellige kontinuerlige avbildninger av den 5-dimensjonale sfæren på den 3-dimensjonale sfæren, det finnes 12 vesensforskjellige avbildninger fra den 6-dimensjonale sfæren på den 3-dimensjonale sfæren og det er 4 vesensforskjellige avbildninger fra den 9-dimensjonale sfæren på den 4-dimensjonale sfæren.

Tallteori: I de siste 40 år har Serres glimrende arbeider innen tallteori, og ikke minst hans visjoner, ført emnet fram mot dagens storhetstid. Hans arbeider har vært uunnværlig i forhold til å berede grunnen for mange av de store gjennombruddene de siste årene, inkludert Wiles' arbeid med Fermats siste sats. Serres bidrag her er så omfattende at det knapt lar seg gjøre å gi et inntrykk av hvor omfangsrikt det er, men vi skal forsøke å forklare litt av bakgrunnen slik at vi kan ha gleden av virkelig å sette pris på i det minste ett av Serres grunnleggende resultater.

Formelen for løsning av andregradslikninger slik vi lærer den på videregående skole, "løser" alle andregradspolynomer i én variabel. Svaret inneholder kvadratroten av et bestemt uttrykk. På 1500-tallet brukte italienske algebraikere kubikkrøtter og fjerderøtter til å uttrykke løsningene på tredjegrads- og fjerdegradspolynomer. Vår egen Niels Henrik Abel viste at dette enkle verktøyet ("å trekke ut røtter") ikke var tilstrekkelig til å løse alle polynomlikninger av grad 5 eller høyere. Ikke desto mindre er ideen med å "trekke ut røtter" fremdeles et viktig instrument når vi skal analysere algebraiske tall, det vil si tall som fremstår som løsninger på polynomlikninger med heltallskoeffisienter, selv om det ikke lykkes i alle sammenhenger. Her er et eksempel på en slik polynomlikning, vilkårlig valgt:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Denne likningen har seks løsninger (viser det seg) og alle er algebraiske tall.

Tidlig på 1800-tallet jobbet matematikeren Carl Friedrich Gauss blant annet med en grunnleggende problemstilling som hadde å gjøre med røtter. Gauss ga en inngående analyse av de algebraiske tallene som er røtter av tallet 1, såkalte enhetsrøtter. Hvis z er et komplekst tall som opphøyd i tredje potens gir 1, så kalles z en kubikkrot av 1, og tilsvarende hvis z er et komplekst tall som opphøyd i n-te potens gir 1,

$$z^n = z\,z\,z \ldots z = 1$$

så kalles z en n-te-rot av 1. For eksempel er de seks sjuenderøttene av 1 (i tillegg til den opplagte løsningen 1) seks komplekse tall som vi kan skrive som:

cos (2p/7) + *i* sin (2p/7)
cos (4p/7) + *i* sin (4p/7)
cos (6p/7) + *i* sin (6p/7)
cos (6p/7) - *i* sin (6p/7)
cos (4p/7) - *i* sin (4p/7)
cos (2p/7) - *i* sin (2p/7)

(Disse seks tallene er nøyaktig løsningene på sjettegradslikningen gitt ovenfor!)

Hvis vi plotter alle sjuenderøttene av 1 i det komplekse planet, vil de danne hjørner i en regulær sjukant.

Ett av Gauss' berømte resultater om enhetsrøtter er en garanti for at de er en rik kilde til å produsere algebraiske tall. Med "rik kilde" mener vi, slik Gauss viste, at det ikke er noe overflødig i listen ovenfor over de seks sjuenderøttene av 1. Det vil si at ingen av røttene kan uttrykkes som en sum av heltalls multipla av de andre røttene. Gauss beviste at for alle n=3,4,… vil n-terøttene av 1 tilsvarende være en "rik kilde".

En av Serres mange grunnleggende setninger sier oss at vi kan ha tilgang til et enda mer rikholdig forråd av algebraiske tall ved å studere de matematiske objektene som kalles elliptiske kurver.

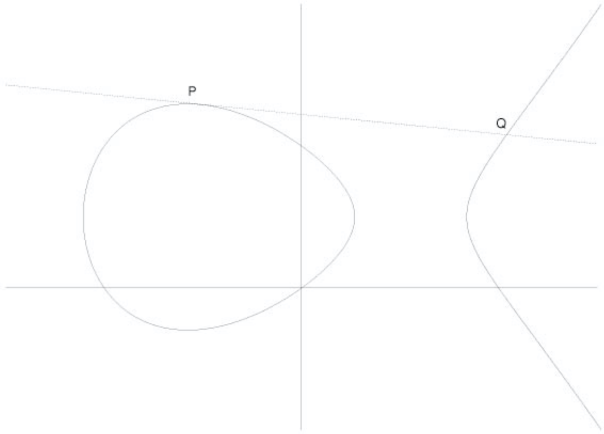
Elliptiske kurver dukket opp gjennom studiene av elliptiske integraler. Navnet kommer av at buelengden til ellipsen kan uttrykkes ved et slikt integral. Gauss, Abel og Jacobi fikk tidlig på attenhundretallet idéen om å *invertere* disse buelengde-uttrykkene. Dermed dukket det som vi i dag kaller elliptiske funksjoner opp. Disse kan betraktes som generaliseringer av de klassiske trigonometriske funksjonene (sinus, cosinus). På elliptiske kurver kan vi på en naturlig måte definere en *addisjonslov*, analogt med addisjonslovene for sinus og cosinus. Vi kan bringe denne analogien et stykke videre, i steden for den velkjente kvadratiske relasjonen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tilfredsstiller de elliptiske funksjonene en kubisk relasjon og løsningene er gitt som plane kubiske kurver. Dette er de *elliptiske kurvene.*

Glatte, elliptiske kurver i (x,y)-planet med heltallskoeffisienter som f.eks.

$$E: \quad y^2 + y = x^3 - x$$

er spesielt relevante for tallteori. Enhver slik elliptisk kurve E vil gi opphav til en samling av algebraiske tall. Disse algebraiske tallene er koordinatene til bestemte punkter på den elliptiske kurven. Vi kaller disse punktene for "torsjonspunkter på E av odde orden". I studiet av en elliptisk kurve E spiller torsjonspunktene noenlunde samme rolle som enhetsrøttene spiller i studiet av komplekse tall.

Vi skal gi en geometrisk beskrivelse av addisjon på en elliptisk kurve E: Vi starter med et punkt P på E med koordinater $P = (a,b)$. Trekk tangenten til kurven E i P. Denne tangenten vil skjære kurven i nøyaktig ett annet punkt Q (bortsett fra i de åtte tilfellene der tangenten vil ligge litt for tett opptil denne kurven, for i disse tilfellene kan det "andre punktet" Q anses som P selv!). Gjør så det samme med Q. Trekk tangenten til kurven i Q. Denne tangenten vil skjære kurven i nøyaktig ett annet punkt R. Gjør så det samme med R, og fortsett på samme måte. Enten vil du aldri komme tilbake til punktet P uansett hvor mange ganger du gjentar denne prosessen, eller så vil du komme tilbake til P. I de tilfellene du kommer tilbake til P, vil koordinatene (a,b) til P nødvendigvis være algebraiske tall. Slike punkter P omtales som antydet over, som torsjonspunkter av odde orden.



Serres svært omfattende generalisering av Gauss' resultater slik vi har gitt et gløtt av ovenfor, sikrer at for alle elliptiske kurver vil mengden av algebraiske tall, definert ved koordinatene til kurvens torsjonspunkter, være en mengde som er like rikholdig som man har lov å håpe på.

For å gi et hint om hva man mener med det vi nå har sagt skal vi kikke litt på et tall som vi refererer til som *ordenen* til et torsjonspunkt på en elliptisk kurve. Vi holder oss til den elliptiske kurven

$$E: \quad y^2 + y = x^3 - x$$

For et gitt primtall p finnes det nøyaktig p^2-1 torsjonspunkter av orden p på denne kurven. Alle disse har (x,y)-koordinater som er algebraiske tall. Serres resultat sier oss at det i dette tilfellet er hele $(p^2-1)(p^2-p)$ forskjellige permutasjoner av denne mengden av torsjonspunkter som bevarer den underliggende algebraiske strukturen.

Serres teorem gir faktisk informasjon om *alle* elliptiske kurver gitt ved kubiske likninger med koeffisienter som er algebraiske tall, ikke bare vårt eksempel. Konsekvensen av dette er at for enhver elliptisk kurve så holder alt vi har sagt til nå eller så er den elliptiske kurven av en helt spesiell type (den *"har kompleks multiplikasjon"*).

Serres arbeider var begynnelsen på den moderne og gloriøse tidsalder for dette området. Et område hvor dyp aritmetisk innsikt i elliptiske kurver koples med mer klassiske begreper, som modulære former og hvor Serre selv har levert inspirerende og epokegjørende bidrag.