THE ABEL PRIZE 2020

Margulis sin konstruksjon av en familie av ”expander”-grafer, dvs. tynne grafer med robuste sammenhengsegenskaper

En graf består av en mengde noder V og en mengde kanter, E. I en komplett graf er det kanter mellom hvert par av noder, og den erderfor langt fra å være tynn. I en sammenhengende graf vil alle par av noder være forbundet av en sekvens av kanter. Expander-grafer er tynne grafer med robuste sammenhengsegenskaper. De har vist seg å ha en mengde anvendelser, i kompleksitets-teori, design av robuste nettverk og innen teorien for feilrettende koder, for å nevne noen.

En måte å beskrive en (urettet) graf G er gjennom det som kalles naboskapsmatrisen. Naboskapsmatrisen $A = (a_{ij})$ er en $n \times n$ kvadratisk matrise hvor antall rader og søyler er det samme som antall noder ($n = |G|$), og slik at

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{hvis } \{i,j\} \notin E \end{cases}$$

Vi kan også definere en naboskaps-operator; $A : \ell^2(V) \to \ell^2(V)$ på funksjoner $f : G \to \mathbb{C}$ gjennom formelen

$$Af(v) = \sum_{\{v,w\} \in E} f(w)$$

dvs. vi summerer funksjonsverdiene til alle naboene til v. Antall naboer til en node $v \in V$ kalles valensen til v, betegnet val(v). Summen over har derfor $val(v)$ ledd. Naboskapsmatrisen er symmetrisk med egenverdier

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

Egenverdiene til naboskapsmatrisen reflekterer ulike egenskaper til grafen. For en k-regulær graf, dvs. en graf der hver node har presis k naboer, har vi $\lambda_1 = k$ og $\lambda_n \geq -k$. Vi har også $\lambda_n = -k$ hvis og bare hvis G inneholder en ikke-tom todelt graf som en egen sammenhengskomponent
For en k-regulær graf på n noder, har vi også

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = nk$$

For en delmengde W av noder i G definerer vi ∂W som en mengde av noder utenfor W, men med en kant inn i W, dvs.

$$\partial W = \{v \in V \setminus W \,|\, \exists w \in W \text{ such that} \{v,w\} \in E\}$$

For en vilkårlig mengde W av noder i G bruker vi notasjonen

$$\varepsilon(W, \partial W) = \{\{v,w\} \in E \,|\, w \in W,\, v \in \partial W\}$$

for mengden av kanter mellom en node inni W og en node utenfor

Definisjon. La $G = (V, E)$ være en endelig graf. Vi definerer ekspansjonskonstanten (eller Cheeger-konstanten) $h(G)$ til G ved

$$h(G) = \min_{W} \{\frac{|\varepsilon(W, \partial W)|}{|W|}\}$$

hvor W er en vilkårlig ikke-triviell delmengde av noder i G, av kardinalitet $|W| \leq \frac{1}{2}|V|$.

Definisjon. En graf er en (d, ϵ)-expander hvis den er d-regulær og $h(G) \geq \epsilon$.

Merk at $\varepsilon(W, \partial W) \leq d|W|$. Med andre ord, $h(G)$ er det minste mulige forholdet mellom antallet kanter som går ut av W og størrelsen på W når W er en ikke-tom mengde av noder, og som ikke er alt for stor. Ekspansjons-konstanten gir oss verdifull informasjon om sammenhengsegenskapene til G. Faktisk er det slik at G er sammenhengende hvis og bare hvis $h(G) > 0$. Et annet faktum er at dersom W er en delmengde av noder med

$$\frac{|W|}{|V|} = \delta < \frac{1}{2}$$

må man fjerne minst $\delta \cdot h(G) \cdot |V|$ noder for å isolere W fra resten av grafen.

Definisjon. En familie$\{ G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ av endelige ikke-tomme sammenhengende grafer $G_i = (V_i, E_i)$ kalles en expander-familie hvs det finnes konstanter $\nu \geq 1$ og $h > 0$, som ikke avhenger av i slik at

i) Antall noder vokser mot ∞ med i, dvs.

$$|G_i| \to \infty \quad \text{når} \quad i \to \infty$$

ii) Antall naboer er begrenset (grafen er tynn), dvs. for hver $i \in \mathbb{N}$ og $v \in V_i$, har vi

$$\text{val}(v) \leq \nu$$

iii) Sammenhengsegenskapene til grafene er kontrollert, dvs, for hver $i \in \mathbb{N}$, så tilfredsstiller ekspansjons-konstanten

$$h(G_i) \geq h > 0$$

Selv om det er relativt enkelt å finne eksempler på expander-grafer, så var det først i 1973 at det ble funnet en metode til å konstruere familier av slike grafer. Margulis kom da opp med følgende konstruksjon:
For hver n, la G_n være en graf med noder $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, dvs. G_n har n^2 noder. Vi definerer fire funksjoner,

$$\begin{aligned} S(a,b) &= (a, a+b) \\ T(a,b) &= (a+b, b) \\ s(a,b) &= (a+1, b) \\ t(a,b) &= (a, b+1) \end{aligned}$$

hvor addisjonen skjer modulo n.

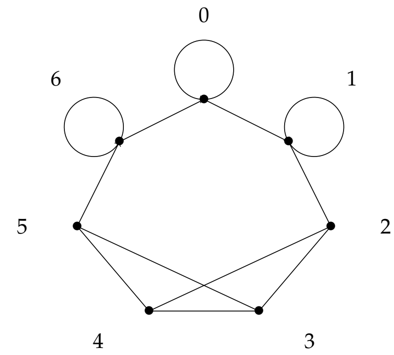

Figure 1: Grafen beskrevet i eksemplet for $p = 7$. Merk at en loop teller som en kant.

En node (a, b) i G_n er forbundet med 8 andre noder, gitt ved

$$s, s^{-1}, t, t^{-1}, S, S^{-1}, T, T^{-1}$$

og Margulis viste at $h(G_n) \geq 0.46$ for alle n. Det følger at $\{G_n\}$ er en expander-familie med konstant valens 8 og ekspansjonskonstant nedad begrenset av 0.46.

Veldig raskt etter at den første konstruksjonen av expander-familier kom i 1973, dukket det opp nye og enklere eksempler:
La p være et primtall og la $V = \mathbb{Z}_p$. Vi definerer en 3-regulær graf $G = (V, E)$ hvor kantene er av to forskjellige typer; $(x, x+1)$ og (x, x^{-1}) for hver $x \in \mathbb{Z}_p$. (Sett $0^{-1} = 0$). Dette er en $(3, \epsilon)$-expander-graf for en fiksert $\epsilon > 0$ og vilkårlig primtall p.