III.

Om Maanens Indflydelse paa Pendelens Bevægelse

af

N. H. Abel.

Da Theorien af Pendelen er af overmaade stor Vigtighed, saa har man bestræbt sig for at gjöre den saa fuldkommen som muligt ved at tage Hensyn til Alt hvad der kunde have Indflydelse derpaa og som kunde underkastes Kalkul; imidlertid har dog Ingen saavidt mig er bekjendt bestemt den Indflydelse, som Himmellegemernes Tiltrækning kunde have paa Pendelens Bevægelse. Omendskjöndt nu denne maa være höist ubetydelig, saa er det dog altid interessant at see hvor stor den er.

Af alle Himmellegemer maa Maanen være det hvis Indflydelse er den störste formedelst dens korte Afstand fra Jorden i Forhold til de Övriges. Solens og de övrige Himmellegemers Indflydelse kan sættes aldeles udaf Betragtning formedelst deres store Afstand fra Jorden. Det er derfor at jeg blot vil indskrænke mig til at betragte Maanen.

Det förste man har at gjöre, er at söge Resultanten af Jordens og Maanens Tiltrækning og dennes Direktion.

Lad M, 2 Tavle Fig. 1, være Observationsstedet, B Maanens Sted, C Jordens Centrum; saa er M C B = v Maanens Zenith-Distance. Lad endvidere Jordens Radius under Æqvator være lig 1, og dens Masse lig 1, saa er, naar Maanens Masse kaldes m og dens Afstand B C fra Jorden r,

$$m = \frac{1}{68,5} \quad \frac{1}{r} = 0,01655101$$

Af Trianglen B C M faaer man:

$$BM^2 = a^2 = MC^2 + BC^2 - 2\, MC.\, BC.\ \cos v$$

altsaa

$$a^2 = 1 + r^2 - 2r.\ \cos.\ v$$

og

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{r^2 - 2r.\ \cos.\ v + 1} = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2}{r}.\ \cos.\ v\right)$$

naar man bortkaster 4de og höiere Potentser af $\frac{1}{r}$.

Maanens Tiltrækning i M er $= \frac{m}{a^2} = k$ altsaa

$$k = \frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{2}{r}.\ \cos v\right)$$

Denne Kraft danner med Jordens Tiltrækning i M, $= g$ en Vinkel CMB $= \mu$; naar altsaa Resultanten af k og g kaldes g' og den Vinkel, som den danner med Vertikalen, θ, saa har man:

$g = 1 + 0,0054454.\ \cos^2 \alpha$, hvor α er Æquators Höide i M.

$$g'^2 = g^2 + k^2 + 2kg.\ \cos.\ \mu$$

$$\cos\ \theta = \frac{g_1^2 + g^2 - k^2}{2gg'}$$

Af den förste Ligning faaes

$$g' = g + k.\ \cos\mu = g + \frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{2}{r}.\ \cos.\ v\right).\ \cos\mu$$

og af den anden:

$$\sin.\ \theta = \frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{2}{r}.\ \cos\ v\right)\sin.\ \mu$$

eller

$$\theta = \frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{2}{r}.\ \cos v\right)\sin.\ \mu.\ 206264'',67$$

Man har i Trianglen MCB : $\cos\mu = \frac{1 + a^2 - r^2}{2a}$

hvoraf let faaes:

$$\cos\mu = -\cos v + \tfrac{1}{r}.\ \sin^2 v$$

$$\sin\mu = \sin v\left(1 + \frac{\cos v}{r}\right)$$

Indsættes disse Værdier i Udtrykkene for g' og θ saa faaer man

$$g' = 1 + 0{,}0054454.\ \cos^2\alpha - \frac{m}{r^2}\left(\cos v - \frac{1 - 3\cos^2 v}{r}\right)$$

$$\theta = \frac{m}{r^2}\ \sin v.\ \left(1 + \frac{3\cos v}{r}\right).\ 206264'',67.$$

Disse Værdier ere rigtige, naar man betragter som Nul Störrelsen $\frac{m}{r^4}$; bortkastes ogsaa $\frac{m}{r^3}$, hvilket man kan, saa faaer man:

$$g' = 1 + 0{,}0054454.\ \cos^2\alpha - \frac{m}{r^2}\cos v$$

$$\theta = \frac{m}{r^2}\sin v.\ 206264'',67$$

Indsættes Værdierne for m og $\frac{1}{r}$ saa faaer man:

$g' = 1 + 0{,}0054454.\ \cos^2\alpha - 0{,}00000400.\ \cos v$
$\theta = 0'',825.\ \sin v$

Maanens Indflydelse paa Tyngdens Störrelse er störst, naar den er i Zenith eller Nadir; man har i förste Tilfælde

$$g' = 0{,}9999960 + 0{,}0054454.\ \cos^2\alpha$$

og i andet Tilfælde

$$g' = 1{,}0000040 + 0{,}0054454\ \cos^2\alpha$$

Vinkelen θ er i disse Tilfælde $= 0$; naar derimod Maanen er i Horizonten saa har Vinkelen θ sin störste Værdie, nemlig $0'',825$; men Maanens Indflydelse paa Tyngdens Störrelse er i dette Tilfælde $= 0$.

Lad os nu undersöge hvad Indflydelse den fundne Forandring i Tyngden vil have paa Tiden af en Pendel-Svingning. Maanen forandrer hvert Öieblik sit Sted paa Himmelen formedelst dens egen Bevægelse og Jordens Omdreining; Maanens Zenith-Distance eller Vinkelen v er altsaa en Funktion af Tiden og fölgelig Attraktionen g' en foranderlig Kraft; dog maa man i det korte Tidsrum af en Pendel-Svingning kunne antage den for konstant.

Lad l være Pendelens Længde og c sinus versus af den störste Vinkel, som Pendelen danner med Tyngdens Retning, saa er, som bekjendt, naar Tiden af en heel Pendelsvingning kaldes T

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}}.\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{c}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{c}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.\left(\frac{c}{2l}\right)^3 + \ldots\right)$$

betegnes Rækken mellem Parentheserne med C saa har man:

$$T = \pi C.\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

hvoraf man faaer ved istedet for g' at sætte dens Værdie g $-0{,}00000400.\ \cos.\ v$

$$T = \pi C.\sqrt{\frac{l}{g'}}.\ (1 + 0{,}00000200.\ \cos.\ v)$$

$\pi C \sqrt{\frac{l}{g}}$ er Tiden af en Pendelsvingning, naar Maanens Virkning sættes ud af Betragtning; man seer altsaa at den störste Forandring, Maanen har paa Tiden af en Pendelsvingning, er en $\frac{2}{1000000}$ af dens Værdie; altsaa meget ubetydelig.

For samme Elongationer og samme Tider af Pendelsvingninger forholder Pendelens Længde sig som Tyngden; kaldes altsaa Pendellængden under Æquator og naar man abstraherer fra Maanens Tiltrækning l′, saa har man under en anden Polhöide $90° - \alpha$ og for Maanens Zenith-Distance v

$$l = l'(1 + 0{,}0054454.\cos^2\alpha - 0{,}00000400.\cos v.)$$

Er Tiden af en Svingning en Sekund, saa er for smaae Buer $l' = 439{,}2266955$ Pariser Linier, altsaa Sekundpendelens Længde

$$l = 439{,}2266955 + 2{,}3917607.\cos^2\alpha$$
$$- 0{,}0017569.\cos.v - 0{,}0000096.\cos^2\alpha.\cos v$$

Naar man kun observerer et lidet Antal Pendelsvingninger kan man antage Maanens Zenithdistance for konstant; men dette er ikke længer tilladt, naar man betragter en lang Række af Svingninger. Lad os söge Tiden af et hvilketsomhelst Antal n af Svingninger, der foregaae i meget smaae Buer. Betegner man Tiderne af de enkelte Pendelsvingninger med $T^0\ T'\ T'' \ldots\ T^{(n-1)}$ og de tilsvarende Zenithdistancer af Maanen med $v^0\ v'\ v'' \ldots v^{(n-1)}$, saa har man, ved at sætte for Kortheds Skyld $\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = k$ og $0{,}0000020 = \beta$, fölgende Ligninger

$$T^0 = k\,(1 + \beta.\cos.v^0)$$
$$T' = k\,(1 + \beta.\cos.v')$$

$$T'' = k\,(1 + \beta.\ \cos.\ v'')$$

.

.

.

$$T^{(n-1)} = k\,(1 + \beta.\ \cos.\ v^{(n-1)})$$

Det kommer nu blot an paa at finde v' v'' etc.

Lad Maanens Deklination under den förste Svingning være δ og dens Timevinkel γ, saa har man:

$$\cos v = \cos \alpha \sin \delta + \sin \alpha.\ \cos \delta.\ \cos \gamma$$

Abstraherer man nu fra Maanens egen Bevægelse og tager blot Hensyn til Jordens Omdreining, saa er, naar Timevinkelen γ er $= \gamma^{\circ}$, til en vis Tid efter t Timers Forlöb

$$\gamma = \gamma^{\circ} + \pi.\frac{t}{12}$$

altsaa den til Tiden t svarende Zenithdistance v, saaledes at

$$\cos v = \cos \alpha.\sin \delta + \sin \alpha.\cos \delta.\cos \left(\gamma^{\circ} + \pi.\frac{t}{12}\right)$$

Antager man nu at $\gamma = \gamma^{\circ}$ svarer til $v = v^{\circ}$, saa har man ved istedet for t at sætte T°

$$\cos v' = \varepsilon + \varepsilon' \cos \left(\gamma^{\circ} + \pi.\frac{T^{\circ}}{12}\right)$$

hvor

$$\varepsilon = \cos \alpha.\sin \delta, \text{ og } \varepsilon' = \sin \alpha.\cos \delta$$

altsaa:

$$T' = k\left[1 + \beta\varepsilon + \beta\varepsilon'.\cos \left(\gamma^{\circ} + \pi.\frac{T^{\circ}}{12}\right)\right]$$

men

$$T^{\circ} = k\,(1 + \beta \cos v^{\circ}) \text{ altsaa}$$

$$T' = k\left[1 + \beta\varepsilon + \beta\varepsilon' \cos\left(\gamma^{\circ} + \frac{\pi}{12}k\,(1 + \beta \cos v^{\circ})\right)\right]$$

det er

$$T' = k\left[1 + \beta\left(\varepsilon + \varepsilon' \cos \left(\gamma^{\circ} + \frac{k\pi}{12}\right)\right]\right.$$

naar man lægger Mærke til at β er en meget liden Störrelse. Paa samme Maade, som man af T^o finder T', finder man T'' af T' &c.; man faaer:

$$T^o = k\,(1 + \beta\,(\varepsilon + \varepsilon'.\cos\gamma^o)$$

$$T' = k\left[1 + \beta\left(\varepsilon + \varepsilon'\cos\left(\gamma^o + \frac{k\pi}{12}\right)\right]\right.$$

$$T'' = k\left[1 + \beta\left(\varepsilon + \varepsilon'\cos\left(\gamma^o + 2.\frac{k\pi}{12}\right)\right]\right.$$

$$T''' = k\left[1 + \beta\left(\varepsilon + \varepsilon'\cos\left(\gamma^o + 3.\frac{k\pi}{12}\right)\right]\right.$$

&c.

$$T^{(n-1)} = k\left[1 + \beta\left(\varepsilon + \varepsilon'\cos\left(\gamma^o + (n-1)\frac{k\pi}{12}\right]\right.\right.$$

Heraf faaer man ved at kalde Tiden af alle Svingninger T

$$T = k\left\{n + n\,\beta\varepsilon + \beta\varepsilon'.\left\{\cos\gamma^o + \frac{\cos\left(\gamma^o + n.\frac{k\pi}{24}\right)\sin.\left(\frac{(n-1)k\pi}{24}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{24}\right)}\right\}\right\}$$

Lad os f. Ex. antage $k = 1'' = \frac{1}{3600}$, $n = 43200$, saa faaer man

$T = 12 + 0{,}0000480 \cos\alpha.\ \sin\delta - 0{,}0000305.\ \sin\alpha.\ \cos\delta.\ \sin\gamma^o$

Er Maanen i Meridianen, naar Bevægelsen begynder, saa er $\gamma^o = 0$ og altsaa

$$T = 12 + 0{,}0000480.\ \cos\alpha\ \sin.\ \delta,$$

det er

$$T = 12^{t.} + 0'',\ 1728\ \cos.\ \alpha.\ \sin\ \delta$$

Hvis man ikke havde taget Hensyn til Maanens Tiltrækning, saa havde man fundet $T = 12^{t.}$, altsaa mindre.

Efter den praktiske Astronomies nu brugelige Methoder bestemmes Himmellegemernes Steder ved Deklinationer og Rectascensioner. Deklinationerne bestemmes ved Zenithdistantser eller Höider, Rectascensionerne ved Stjernernes Gjennemgangs-Momenter igjennem Meridianen. En Stjernes Zenithdistantse er den Vinkel, som en Linie fra Stjernen til Öiet gjör med Vertikallinien eller Tyngdens Retning paa Stedet. Meridianen er en Flade, som man kan tænke sig igjennem Polerne og Vertikallinien. Er nu Tyngdens *Retning* ei fuldkommen konstant, saa er Zenithdistantsen af et og samme Punkt af Meridianen ei til alle Tider nöiagtig den samme, og Meridianen er ei en uforanderlig eller fast Flade, altsaa de Forudsætninger, paa hvilke disse Methoder grunde sig, ei i strængeste Forstand rigtige. Hertil kommer, at da Stjernernes Rektascensions-Forskjel bestemmes ved den imellem Kulminationerne forlöbne Tid, og denne udmaales ved et Pendeluhr, hvis Gang man forudsætter at være eensformig i 24 Timer, saa maa enhver Forandring i Tyngdens *Intensitet* have Indflydelse paa Uhrets Gang, altsaa paa de deraf udledede Rektascensionsforskjeller. Sæt f. Ex. at man iagtta-

Naturforskere talte da eet og samme, eller i det mindste et let oversætteligt Sprog. Ved den förste Methode derimod er det rimeligt, at de vilkaarlige Normaler med Tiden blive slettere, imedens den experimentale Konst stiger, og en större Nöiagtighed altsaa udfordres; og nye Sammenligninger med den naturlige Eenhed, som afvige lidet fra de ældre, ville gjöre Forholdene imellem de forskjellige Landes Normaler vaklende.

Det er vel ingen Tvivl om, at Frygt for den Forvirring, som nödvendig maa opstaae, ved at indföre nye, fra de ældre betydelig afvigende, Maale- og Vægt-Eenheder, have afholdt de fleste Nationer fra, at indföre et naturligt Maal- og Vægtsystem. Ved den foreslagne Methode undgaaer man alle disse Uleiligheder, uden at tabe nogen af et saadant Systems Fordele, og vinder desuden en let og nöiagtig Sammenligning. Denne vakkre Idee, som först er fremstillet af Prof. *Örsted*, har jeg derfor fundet det gavnligt her lidt nöiere at udföre.

Hansteen.

Berigtigelse.

I det i sidste Hefte af Magazinet (Side 219—26) indrykkede Stykke, om Maanens Indflydelse paa Pendelens Bevægelse er af Uagtsomhed forbigaaet en væsentlig Omstændighed, som gjör Resultatet urigtigt. Det deri förte Raisonnement gjelder nemlig kun i det Tilfælde, at Jorden antages for fast. Naar derimod Jorden, som virkelig finder Sted, er bevægelig, saa tiltrækker Maanen ikke alene Pendelen, men ogsaa hele Jorden, hvilken sidste Tiltrækning kan betragtes som blot virkende paa Jordens Centrum, naar Jordens Masse deri tænkes forenet.

For nu at kunne betragte Jorden som fast, maa man altsaa tænke sig i Jordens Centrum en Kraft, som virker parallel med en Linie fra dette Punkt til Maanens Centrum, men i modsat Retning, og som er lig dette Himmellegemes Tiltrækning paa Jordens Centrum. Paa et Legeme paa Jordens Overflade virke altsaa fölgende tre Kræfter. 1) Jordens Tiltrækning $= g$ efter Vertikalen. 2) Maanens Tiltrækning $= \frac{m}{a^2}$, hvis Direktion danner en Vinkel med Vertikalen $= \mu$ og 3) En Kraft $= -\frac{m}{r^2}$, der virker under en Vinkel med Vertikalen, som er lig $180^\circ - v$. (g, m, r, a, μ og v have samme Betydning, som i forrige Hefte). Kaldes Resultanten af alle disse Kræfter g', og den Vinkel den danner med Vertikalen θ, saa vil man finde:

$$g' = g + \frac{m}{r^2}(1-3\cos^2 v)$$

$$\theta = \frac{3m}{r^3}\sin v.\cos v.\ 206264'',67$$

naar man bortkaster Störrelser af Ordenen $\frac{m}{r^3}$

Indsættes Værdierne for m og r, saa faaer man:

$$g' = g + 0,000000066\,(1-3\cos^2 v)$$

$$\theta = 0'',04.\sin.v.\cos.v$$

heraf sees altsaa at Maanens Indflydelse paa Tyngdens Intensitet og Retning er ganske umærkelig.

Abel.