X.

Det endelige Integral $\Sigma^n\varphi x$ udtrykt ved et enkelt bestemt Integral

af

N. H. Abel.

Man kan, som bekjendt, ved Hjælp af det Parsevalske Theorem udtrykke det endelige Integral $\Sigma^n\varphi x$ ved et dobbelt bestemt Integral; men, saavidt jeg veed, har endnu Ingen udtrykt det samme Integral ved et enkelt bestemt Integral. Dette er Gjenstanden for nærværende Afhandling.

Betegner man ved φx hvilkensomhelst Function af x, seer man let, at man altid kan sætte:

$$\varphi x = \int e^{xv}.\, fv dv \ldots\ldots (1)$$

hvor Integralet tages mellem 2 hvilkesomhelst Grændser af v uafhængige af x. Functionen fv betegner en Function af v, hvis Form er afhængig af Formen af

φx. Sætter man $\Delta x = 1$, saa faaer man ved at tage det endelige Integral af hver Deel af Ligningen (1)

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \cdot \frac{fv}{e^v - 1} \cdot dv \ldots\ldots (2),$$

hvor man maa tilföie en vilkaarlig Constant. Tager man endnu engang det endelige Integral, faaer man:

$$\Sigma^2 \varphi x = \int e^{vx} \cdot \frac{fv}{(e^v - 1)^2} \cdot dv,$$

og i Almindelighed vil man finde:

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \cdot \frac{fv}{(e^v - 1)^n} \cdot dv \ldots\ldots (3)$$

For at fuldstændiggjöre dette Integral maa man paa höire Side af Lighedstegnet tilföie en Function af Formen:

$$C + C_1 x + C_{11} x^2 + \ldots\ldots C_{n-1} x^{n-1},$$

hvor C, C_1, C_{11}, o. s. v. ere vilkaarlige Constanter.

Det kommer nu an paa at finde Værdien af det bestemte Integral $\int e^{vx} \cdot \frac{fv}{(e^v - 1)^n} \cdot dv$.

I denne Hensigt benytter jeg fölgende Theorem af *Legendre* (Exerc. de calc. int. T. II p. 189):

$$\tfrac{1}{4} \cdot \frac{e^v + 1}{e^v - 1} - \frac{1}{2v} = \int \frac{dt. \sin(vt)}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \begin{matrix} t = 0 \\ t = \frac{1}{0} \end{matrix} \right\}$$

Heraf faaer man:

$$\frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \tfrac{1}{2} + 2 \int \frac{dt. \sin(vt)}{e^{2\pi t} - 1} \ldots (4)$$

Substituerer man denne Værdie af $\frac{1}{e^v - 1}$ i Ligningen (2), saa faaer man:

$$\Sigma\varphi x = \int e^{vx} \cdot \frac{fv}{v} \cdot dv - \tfrac{1}{2} \int e^{vx} \cdot fv \cdot dv +$$

$$2 \int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \int e^{vx} \cdot fv \cdot \sin (vt)\, dv$$

Integralet $\int e^{vx}\, fv \cdot \sin (vt)\, dv$ findes paa fölgende Maade:

Sætter man i Ligningen (1) istedetfor x efterhaanden $x + t\sqrt{-1}$ og $x - t\sqrt{-1}$; saa faaer man;

$$\varphi (x + t\sqrt{-1}) = \int e^{vx} \cdot e^{vt\sqrt{-1}} \cdot fv \cdot dv$$

$$\varphi (x - t\sqrt{-1}) = \int e^{vx} \cdot e^{-vt\sqrt{-1}} \cdot fv \cdot dv,$$

hvoraf man ved at subtrahere og dividere med $2\sqrt{-1}$ faaer;

$$\int e^{vx} \cdot \sin (vt) \cdot fv \cdot dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi (x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

Altsaa bliver

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + 2 \int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$(t = 0,\ t = \tfrac{1}{0})$.

For nu at finde Værdien af det almindelige Integral $\Sigma^n\varphi x = \int e^{vx} \cdot fv \cdot \frac{dv}{(e^v-1)^n}$, sætte man

$$\frac{1}{(e^v-1)^n} = (-1)^{n-1}\Big(A_{0,n} \cdot p + A_{1,n} \cdot \frac{dp}{dv} + A_{2,n} \cdot \frac{d^2p}{dv^2} +$$

$$\ldots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\Big),\text{ hvor } p = \frac{1}{e^v-1},\text{ og } A_{0,n},\ A_{1,n}$$

o. s. v. ere Talcoefficienter, som skulle bestemmes. Differentierer man den forrige Ligning, saa faaer man

$$\frac{n\,.\,e^v}{(e^v-1)^{n+1}} = (-1)^n . \left(A_{o,n} . \frac{dp}{dv} + A_{1,n} . \frac{d^2p}{dv^2} + \right.$$

$$\left. \ldots\ldots A_{n-1,n} . \frac{d^np}{dv^n}\right).$$

Nu er $\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}} = \frac{n}{(e^v-1)^n} + \frac{n}{(e^v-1)^{n+1}}$

Altsaa $\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}} =$

$$\left\{\begin{array}{l} n\,(-1)^{n-1}\left(A_{o,n}.p + A_{1,n}.\frac{dp}{dv} + \ldots A_{n-1,n}.\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right) \\ +n(-1)^n\left(A_{o,n+1}.p + A_{1,n+1}.\frac{dp}{dv} + \ldots A_{n,n+1}.\frac{d^np}{dv^n}\right) \end{array}\right\}$$

Ved at sammenligne disse 2 Udtryk for $\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}$ udleder man fölgende Ligninger:

$$A_{o,n+1} - A_{o,n} = 0 \quad \text{o:}\quad \Delta A_{o,n} = 0$$

$$A_{1,n+1} - A_{1,n} = \tfrac{1}{n} A_{o,n} \quad \text{o:}\quad \Delta A_{1,n} = \tfrac{1}{n} A_{o,n}$$

$$A_{2,n+1} - A_{2,n} = \tfrac{1}{n} A_{1,n} \quad \text{o:}\quad \Delta A_{2,n} = \tfrac{1}{n} A_{1,n}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$A_{n-1,n+1} - A_{n-1,n} = \tfrac{1}{n} A_{n-2,n} \quad \text{o:}\quad \Delta A_{n-1,n} = \tfrac{1}{n} A_{n-2,n}$$

$$A_{n,n+1} = \tfrac{1}{n} A_{n-1,n}$$

Heraf faaer man:

$A_{o,n} = 1$, $A_{1,n} = \Sigma\,\frac{1}{n}$, $A_{2,n} = \Sigma\,(\frac{1}{n}\,\Sigma\,\frac{1}{n})$, $A_{3,n} = \Sigma\,(\frac{1}{n}\,\Sigma\,(\frac{1}{n}\,\Sigma\,\frac{1}{n}))$, o. s. v.

$$A_{n,n+1} = \frac{1}{n}.\frac{1}{n-1}.\frac{1}{n-2}\ldots\ldots\frac{1}{2}.\frac{1}{1}.A_{o,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}$$

Denne sidste Ligning tjener til at bestemme Constanterne, som indeholdes i Udtrykkene for $A_{1,n}$, $A_{2,n}$, $A_{3,n}$, o. s. v.

Naar man saaledes har bestemt Coefficienterne $A_{0,n}$, $A_{1,n}$, $A_{2,n}$, o. s. v., saa faaer man ved at substituere i Ligningen (3) istedetfor $\frac{1}{(e^v-1)^n}$ dens Værdie:

$$\Sigma^n\varphi x = (-1)^{n-1}\int e^{vx} fv \,.\, dv\left(A_{0,n}\,.\,p + A_{1,n}\,.\,\frac{dp}{dv} + \right.$$
$$\left.\ldots . A_{n-1,n}\,\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$

Nu har man $p = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2\int\frac{dt.\sin(vt)}{e^{2\pi t}-1}$,

hvoraf man faaer ved Differentiation:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{v^2} + 2\int\frac{tdt.\cos(vt)}{e^{2\pi t}-1}$$

$$\frac{d^2p}{dv^2} = +\frac{2}{v^3} - 2\int\frac{t^2dt.\sin(vt)}{e^{2\pi t}-1}.$$

$$\frac{d^3p}{dv^3} = -\frac{2.3}{v^4} - 2\int\frac{t^3dt.\cos(vt)}{e^{2\pi t}-1}$$

o. s. v.

altsaa ved Substitution:

$$\Sigma^n\varphi x = \int\left(\frac{\Gamma n}{v^n}\,.\,A_{n-1,n} - A_{n-2,n}\,.\,\frac{\Gamma(n-1)}{v^{n-1}} + A_{n-3,n}\,.\right.$$
$$\left.\frac{\Gamma(n-2)}{v^{n-2}} - \ldots + (-1)^{n-1}A_{0,n}\,.\,\frac{1}{v} + (-1)^n.\frac{1}{2}\right)e^{vx}.fv.dv$$
$$+ 2(-1)^{n-1}\int\int\frac{P.\sin(vt).dt}{e^{2\pi t}-1}\,.\,e^{vx}\,.\,fv\,.\,dv +$$
$$2(-1)^{n-1}\int\int\frac{Q.\cos(vt).dt}{e^{2\pi t}-1}.\,e^{vx}fvdv$$

Af Ligningen $\varphi x = \int e^{vx}.\,fv.dv$
faaer man ved Integration

$$\int \varphi x dx = \int e^{vx} . fv . \frac{dv}{v}$$

$$\int^2 \varphi x dx = \int e^{vx} . fv . \frac{dv}{v^2}$$

$$\int^3 \varphi x dx = \int e^{vx} . fv . \frac{dv}{v^3}$$

o. s. v.

Nu er

$$\int \sin(vt).dv.e^{vx}.fv = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$\int \cos(vt).dv.e^{vx}.fv = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{--1})}{2};$$

altsaa faaer man ved Substitution:

$$\Sigma^n \varphi x = \Gamma .A_{n-1,n}.\int^n \varphi x.dx^n - \Gamma(n-1).A_{n-2,n}.\int^{n-1}\varphi x.dx^{n-1}$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\int \varphi x . dx + (-1)^n . \tfrac{1}{2}\varphi x$$

$$+ 2(-1)^{n-1}\int \frac{P.dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ 2(-1)^{n-1}\int \frac{Qdt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

(fra $t = 0$ til $t = \frac{1}{0}$

Her er $P = A_{0,n} - A_{2,n}.t^2 + A_{4,n}.t^4 - \ldots$

og $Q = A_{1,n}.t - A_{3,n}.t^3 + A_{5,n}.t^5 - \ldots$

Sætter man f. Ex. $n = 2$, faaer man;

$$\Sigma^2 \varphi x = \iint \varphi x.dx^2 - \int \varphi x dx + \tfrac{1}{2}\varphi x$$

$$- 2\int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$- 2\int \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

φx være f. Ex. $= e^{ax}$, saa faaer man:

$$\varphi(x \pm t\sqrt{-1}) = e^{ax} . e^{\pm at\sqrt{-1}},\ \int e^{ax}dx = \frac{1}{a} . e^{ax},$$

$$\iint e^{ax}dx^2 = \frac{1}{a^2} . e^{ax};$$

altsaa, naar man substituerer og dividerer med e^{ax}:

$$\frac{1}{(e^a-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2\int \frac{dt.\sin(at)}{e^{2\pi t}-1} - 2\int \frac{tdt.\cos(at)}{e^{2\pi t}-1}$$

Det mærkværdigste Tilfælde er det, hvori $n=1$. Man har da, som ovenfor er anfört:

$$\Sigma\varphi x = C + \int\varphi x dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + 2\int \frac{dt.}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

Antager man, at de 2 Integraler $\Sigma\varphi x$ og $\int\varphi x$ forsvinde for $x = a$, seer man let, at man faaer:

$$C = \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

altsaa

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x dx - \tfrac{1}{2}(\varphi x - \varphi a) + 2\int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$- 2\int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

Sætter man $x = \infty$, og antager at φx og $\int\varphi x dx$ ere $= 0$ for denne Værdie af x, saa faaer man:
$\varphi a + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \varphi(a+3) + \ldots$ i det Uendelige $= \int\varphi x dx\ (x=a,\ x=\infty) + \tfrac{1}{2}\varphi a$

$$- 2\int \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} . \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

φx være f. Ex. $= \frac{1}{x^2}$, saa faaer man:

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{(a-t\sqrt{-1})^2-(a+t\sqrt{-1})^2}{(a^2+t^2)^2}\right)$$

$$=\frac{-2at}{(a^2+t^2)^2}$$

altsaa

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\frac{1}{(a+3)^2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{a}+4a\int\frac{tdt}{(e^{2\pi t}-1)(a^2+t^2)^2}\ \left(t=0,\ t=\frac{1}{0}\right)$$

og naar $a=1$

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{4}=\tfrac{3}{2}+4\int\frac{tdt}{(1+t^2)^2(e^{2\pi t}-1)}.$$