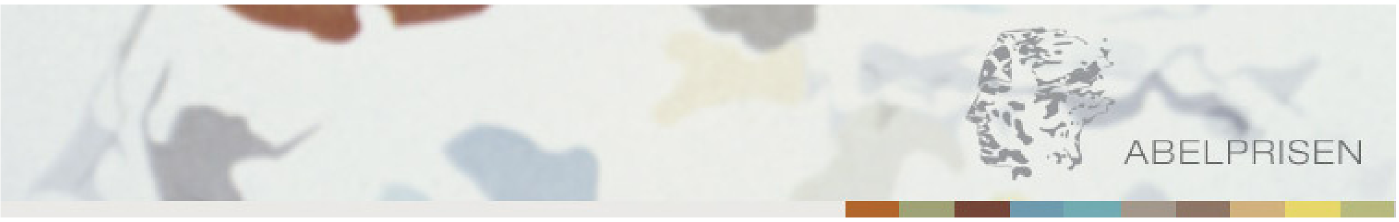
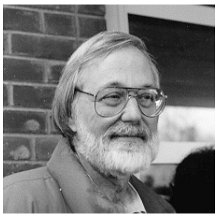




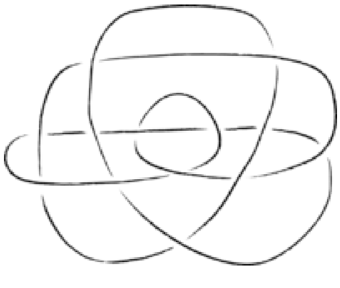
Abelprisvinner 2011
John Willard Milnor

J.W.Milnor: On the total Curvature of Knots

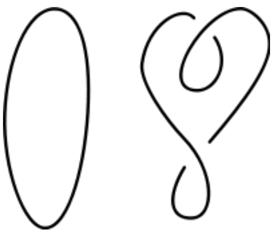
Annals of Mathematics, Vol 52, no 2 (1950)

John Milnor fikk sitt første matematiske arbeid antatt for publikasjon i oktober 1949, kun 18 år gammel. Arbeidet dreide seg om “knutegeometri”. Den tyske matematikeren Werner Fenchel, ansatt ved universitetet i København, viste i 1929 at totalkrumningen til en lukket kurve i rommet alltid er minst 2π, et resultat som ble utvidet til å gjelde for vilkårlig dimensjon av polakken Karol Borsuk i 1949. Milnors resultat kombinerer Fenchel-Borsuk med knuteteori og sier at for en ikke-triviell knute, så er totalkrumningen minst 4π, dvs. minst to hele rotasjoner. Resultatet ble vist uavhengig, men omtrent samtidig, av ungareren István Fáry og resultatet går nå under navnet Fáry-Milnors teorem.

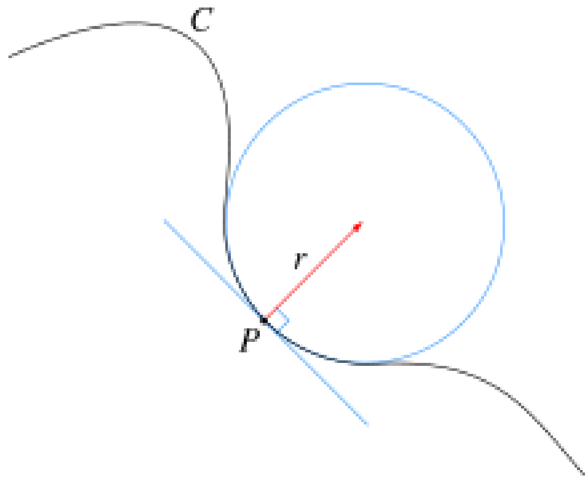
Knuteteori
Kuteteori er en matematisk teori som beskriver knuter. Med en knute forstår vi en lukket kurve i rommet, så knuten har ingen åpne ender. Vi kan tegne en knute som en plan kurve, der vi i hvert kryss angir hvilken del av snoren som går over og hvilken som går under, slik som på figuren. Vi sier at to knuter er ekvivalente dersom vi kan bringen den ene over i den andre bare ved å dra og skyve på tauet, uten å kutte og skjøte. Den enkleste av alle knuter, sirkelen, kalles en uknute, siden det ikke er en knute i vanlig forstand, men er en knute i matematisk forstand. Tegningen viser to utgaver av en uknute, den venstre er nokså åpenbart en uknute, men den til høyre er også en uknute, begge de to krøllene lar seg rette ut uten å kutte tauet.



Et eksempel på en knute

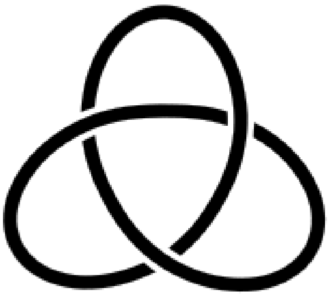


Krumning av kurver i rommet
Milnors 1949-avhandling dreier seg om krumning av knuter. Krumningen til en kurve er en størrelse vi angir i hvert eneste punkt på kurven og som sier noe om hvor buet kurven er i dette punktet. En rett linje har krumning 0 i alle punkter, mens en sirkel har konstant krumning gitt ved 1



delt med radius til sirkelen. Det betyr at en liten sirkel har stor krumning, og en stor sirkel har liten krumning. Den totale krumningen finner vi ved å summere krumningen i alle punkter på kurven. For en sirkel, med konstant krumning, får vi krumning multiplisert med lengden av sirkelen, dvs.

(1/R)* 2πR= 2π



Dette stemmer godt overens med Fenchels resultat fra 1929, som sier at totalkrumingen er minst 2π, og at vi har likhet dersom kurven er plan konveks, slik som sirkelen vi har sett på.

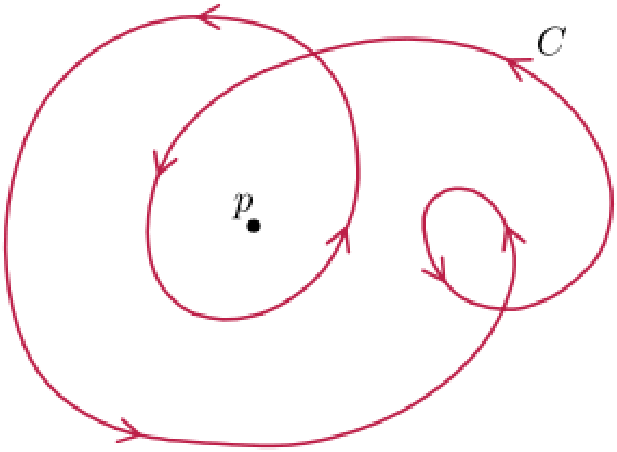
Fáry-Milnors teorem

Milnors ungdomsarbeid har i ettertid fått navnet Fáry-Milnors teorem. Grunnen til det doble navnet er at ungareren István Fáry samtidig og uavhengig også beviste teoremet.

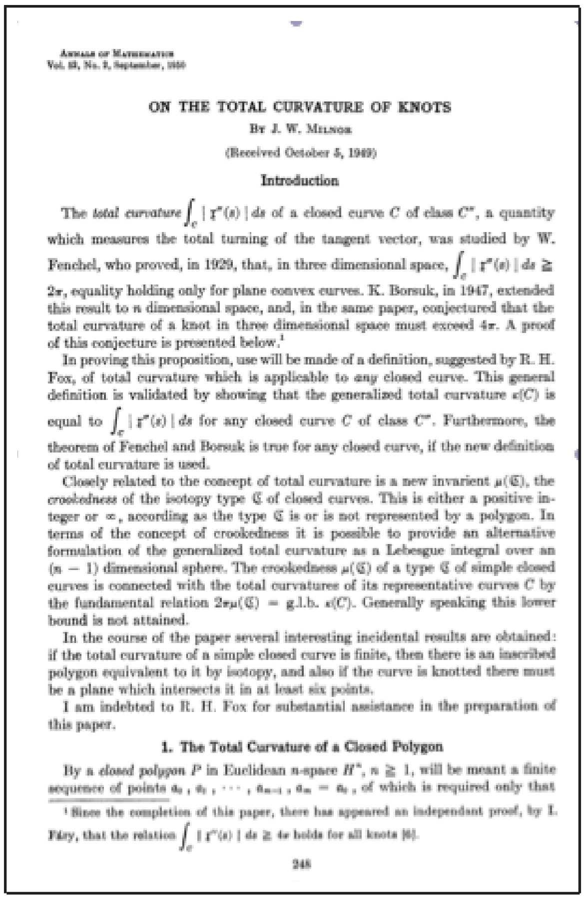
Fáry-Milnors resultat sier at dersom en knute ikke er en uknute, så må den totale krumningen være minst 4π. Vi må altså lede snora minst to ganger rundt for at det skal bli en ordentlig knute. Den enkleste ikke-trivielle knuten er det som kalles en vanlig knute, eller trefoil knot på engelsk. Det er realtivt lett å godta at denne knuten har krumning minst 4π, ved å følge kurven. Ser vi bort fra de områdene vi går over eller under så vil den plane projeksjonen av kurven ha totalkrumning 4π, eller to hele runder. I over- og undergangene vil vi i tillegg få litt krumning i retningen ut og inn av arket, så totalen vil bli 4π pluss det som kommer i tillegg i kryssene.

Det er verdt å merke seg at Fáry-Milnors resultat bare gir oss en logisk slutning den ene veien. Dersom vi har å gjøre med en ikke-triviell knute, så er krumningen mer enn 4π. Men det motsatte er ikke sant. Vi kan godt ha kurver med krumning langt over 4π som er uknuter, slik som på figuren.

Vakte oppsikt



Milnors resultat for knuteresultatet benytter seg av relativ enkel matematikk, men er gjort på en elegant måte. Det vakte selvfølgelig oppsikt at en 18 år gammel gutt kunne komme opp med et slikt resultat og at artikkelen hans i tillegg var velskrevet og modent formulert. Det hele bar bud om at et stort talent hadde presentert seg for det matematiske samfunnet.



ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 52, No. 2, September, 1950

ON THE TOTAL CURVATURE OF KNOTS

BY J. W. MILNOR

(Received October 5, 1949)

Introduction

The *total curvature* $\int_C |\mathfrak{r}''(s)|\, ds$ of a closed curve C of class C'', a quantity which measures the total turning of the tangent vector, was studied by W. Fenchel, who proved, in 1929, that, in three dimensional space, $\int_C |\mathfrak{r}''(s)|\, ds \geqq 2\pi$, equality holding only for plane convex curves. K. Borsuk, in 1947, extended this result to n dimensional space, and, in the same paper, conjectured that the total curvature of a knot in three dimensional space must exceed 4π. A proof of this conjecture is presented below.[1]

In proving this proposition, use will be made of a definition, suggested by R. H. Fox, of total curvature which is applicable to *any* closed curve. This general definition is validated by showing that the generalized total curvature $\kappa(C)$ is equal to $\int_C |\mathfrak{r}''(s)|\, ds$ for any closed curve C of class C''. Furthermore, the theorem of Fenchel and Borsuk is true for any closed curve, if the new definition of total curvature is used.

Closely related to the concept of total curvature is a new invarient $\mu(\mathfrak{C})$, the *crookedness* of the isotopy type $\mathfrak{C}$ of closed curves. This is either a positive integer or ∞, according as the type $\mathfrak{C}$ is or is not represented by a polygon. In terms of the concept of crookedness it is possible to provide an alternative formulation of the generalized total curvature as a Lebesgue integral over an $(n-1)$ dimensional sphere. The crookedness $\mu(\mathfrak{C})$ of a type $\mathfrak{C}$ of simple closed curves is connected with the total curvatures of its representative curves C by the fundamental relation $2\pi\mu(\mathfrak{C}) = \text{g.l.b. } \kappa(C)$. Generally speaking this lower bound is not attained.

In the course of the paper several interesting incidental results are obtained: if the total curvature of a simple closed curve is finite, then there is an inscribed polygon equivalent to it by isotopy, and also if the curve is knotted there must be a plane which intersects it in at least six points.

I am indebted to R. H. Fox for substantial assistance in the preparation of this paper.

1. The Total Curvature of a Closed Polygon

By a *closed polygon* P in Euclidean n-space E^n, $n \geqq 1$, will be meant a finite sequence of points $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m = a_0$, of which is required only that

[1] Since the completion of this paper, there has appeared an independant proof, by I. Fáry, that the relation $\int_C |\mathfrak{r}''(s)|\, ds \geqq 4\pi$ holds for all knots [6].

248