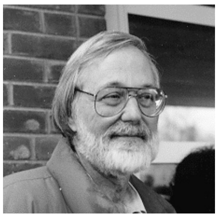
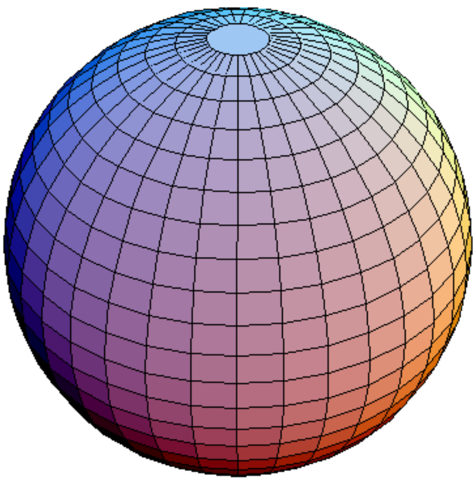


Abelprisvinner 2011
John Willard Milnor

Eksotiske sfærer i 7 dimensjoner

Komiteen sier i sin begrunnelse: Milnors oppdagelse av eksotiske glatte sfærer i sju dimensjoner var fullstendig uventet. Oppdagelsen var forløperen for differensialtopologien og førte til en eksplosjon av arbeider fra en hel generasjon fremragende matematikere. Denne eksplosjonen har vart i flere tiår og har endret hele matematikklandskapet. Sammen med Michel Kervaire arbeidet Milnor videre og gav en fullstendig fortegnelse over alle distinkte differensiable strukturer på sfærer av alle dimensjoner. Spesielt viste de at den sjudimensjonale sfære har nøyaktig 28 distinkte differensiable strukturer.

Sju-dimensjonale sfærer
En sfære i sju dimensjoner er en generalisering av den ordinære to-dimensjonale sfæren. Vi betrakter en sirkel som en en-dimensjonal sfære, og ved å fiksere to diametralt motsatte punkter og spinne sirkelen rundt i den neste dimensjonen, får vi en to-dimensjonal sfære. Vi kan gjøre det samme med en to-dimensjonal sfære, sette en fingertupp på nordpolen og en på sydpolen, og



spinne sfæren rundt i en høyere dimensjon. Det gir oss en (ikke-visuell) tre-dimensjonal sfære. Dette fortsetter vi med til vi kommer til en sju-dimensjonal sfære.
En annen beskrivelse av sfærene går via symmetri. Sirkelen består av alle punkter i planet med en gitt avstand til et bestemt punkt, som vi kaller sentrum. Den to-dimensjonale sfæren er definert på samme måte, som alle punkter i rommet med gitt avstand til et sentrum. Den sju-dimensjonale sfæren består av alle punkter i et åtte-dimensjonalt rom med gitt avstand til et utvalgt sentrum.

Differensiable strukturer
Lokalt, dvs. på en liten del av sfæren, er det å gi en differensiabel struktur omtrent det samme som å tegne et kart over området. Dette kan gjøres på mange forskjellige måter. For å definere en differensiabel struktur på hele sfæren, må vi ha nok kart til å dekke hele sfæren, og i tillegg må vi vite hvordan vi kan gå fra det ene kartet til det andre der de overlapper. Siden kuleskallet er krumt, vil

kartene bli litt fortegnet langs kanten, parallelle linjer vil sprike. Når vi legger kartene over/inntil hverandre, så vil de tilsvarende parallelle linjene sprike i hver sin retning i overlappingen mellom de to kartene. For å kunne lese kartene i sammenheng må vi definere en overgangsfunksjon mellom de to kartene der de overlapper. Vanskeligheten, i en matematisk forstand, er ikke å tegne kartene eller å beskrive overlappingsfunksjonene, men å få alle de enkelte kartene til å henge sammen hele veien rundt, også når vi kommer til det aller siste kartet, som skal passe med fire overlappende kart. Intuitivt virker ikke dette som noe problem, og det er det heller ikke på en vanlig sfære, men dersom man prøver å gjøre dette for en 7-dimensjonal sfære, med tilsvarende 7-dimensjonale kart, er det hele ikke så enkelt.

Eksotiske sfærer

For å få dette til må man undreveis gjøre valg. Milnor og Kervaire beviste at det finnes hele 28 måter å gjøre dette på. En av dem er nokså rett fram, omtrent som i det to-dimensjonale tilfellet, mens de 27 andre ikke har noen analogier for to-dimensjonale sfærer. Milnor kalte disse 27 andre for eksotiske strukturer eller eksotiske sfærer.

Antall forskjellige differensiable strukturer på sfærer i lave dimensjoner

dimensjon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
# strukturer	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Status for dimensjon 4 er fortsatt uavklart. Man vet ikke om det er 1, flere enn 1 eller uendelig mange glatte strukturer på en 4-sfære. Påstanden om at det er nøyaktig én er kjent under navnet “den glatte Poincaré-formodningen i dimensjon 4”. Bakgrunnen er at da Michael Freedman i 1982 beviste Poincaré-formodningen i dimensjon 4, dvs. at enhver 4-mangfoldighet som er homotopi-ekvivalent til en 4-sfære er homeomorf med en 4-sfære, så etterlot han et nytt ubesvart spørsmål. Vil en 4-mangfoldighet som er homotopi-ekvivalent til en 4-sfære også være diffeomorf med en 4-sfære? Milnors eksotiske sfærer viser uansett at den glatte Poincaré-formodningen er gal i dimensjon sju.