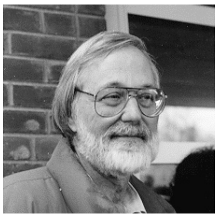
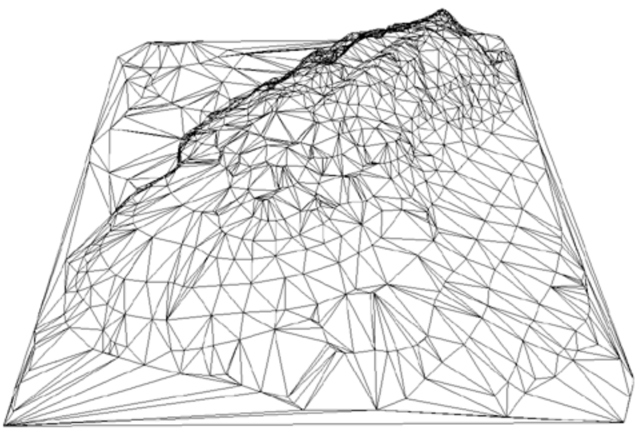


Abelprisvinner 2011
John Willard Milnor

Die Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie (Steiniz, Tietze; 1908)

Die Hauptvermutung (Hovedhypotesen) innen kombinatorisk topologi (kalles i dag algebraisk topologi) er en hypotese som ble lansert allerede i 1908 av den tyske matematikeren Ernst Steiniz og østerrikeren Heinrich Tietze. Hypotesen sier at to trianguleringer av et rom alltid har en felles forfining. Hypotesen ble bevist i dimensjon 2 av Tibor Radó på 1920-tallet og i dimensjon 3 Edwin E. Moise på 1950-tallet. I høyere dimensjon stemmer ikke hypotesen. Det ble bevist av Milnor i 1961 ved at han ga et moteksempel

Triangulering
Da Norges Geografiske Oppmåling (NGO) ble opprettet av offiseren Heinrich Wilhelm von Huth i 1773 var formålet å måle opp Norge for å kunne tegne nøyaktige kart. I 1779 startet arbeidet med trianguleringen. Triangulering innebærer at man plukker ut referansepunkter som man beskriver posisjonen til i forhold til de omliggende referansepunktene. Man trekker linjer mellom nærliggende punkter, på en slik måte at hele det oppmålte arealet blir dekket av trekanter. Valg av referansepunkter og forbindelseslinjer gjøres slik at landområdet innenfor hver trekant blir mest mulig plant. Det betyr at på steder hvor det er veldig kupert, så trenger man mange og tettliggende referansepunkter, mens på flate jordbruksområder kan man klare seg med få punkter. Resultatet blir at man får en god beskrivelse av hele området, både horisontalt og vertikalt.

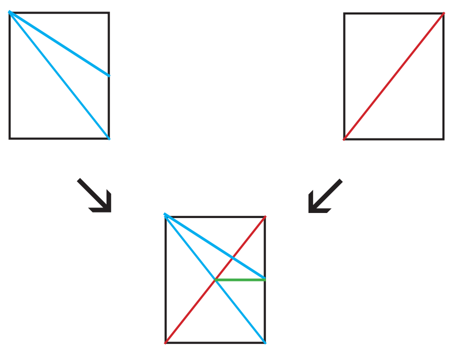


Triangulering av et fjellandskap

Denne oppskriften på triangulering kan vi bruke på en vilkårlig flate. Trianguleringen av flaten gir oss en stykkvis lineær modell av flaten. I mange sammenhenger kan denne modellen erstatte flaten. Den er lettere å regne på, og den har samtidig bevart en rekke av flatens viktige egenskaper.

Forfining av trianguleringer
I *Hauptvermutung* inngår begrepet forfining av en triangulering. Dette dreier seg om å ta en allerede eksisterende oppdeling i trekanter og dele denne ytterligere opp, i nye, mindre trekanter. I praksis foregår det ved at vi introduserer flere referansepunkter, og trekker de nødvendige forbindelseslinjene for å skaffe oss et lappverk av trekanter.

Det finnes ikke noen entydig måte å triangulere en flate. Det er uendelig mange måter å velge ut referansepunkter og selv med de samme referansepunktene er det mulig å trekke andre forbindelseslinjer og å tegne et annet trekantnett.
Hauptvermutungen forteller oss at uansett utgangspunkt, så kan vi finne en felles forfining av to trianguleringer av samme rom.
For plane områder er det lett å gjøre dette i praksis. Vi legger de to trianguleringene oppå hverandre, slik at vi får med alle referansepunkter og alle forbindelseslinjer i begge oppdelingene. Det er mulig at vi på denne måten finner nye skjæringspunkter mellom linjer som ikke allerede er referansepunkter, verken i den ene eller andre trianguleringen. I så fall introduserer vi et nytt referansepunkt i skjæringspunktet. Det er også tenklig at det dukker opp firkanter eller fem- eller endog seks-kanter i det nye mønsteret. I så fall må vi introdusere både referansepunkter og forbindelseslinjer inne i mangekantene for å dele de opp i trekanter.



To trianguleringer av et rektangel og deres felles forfining

Det er viktig å merke seg at Hauptvermutungen uttaler seg om alle mulige tilfeller av par av trianguleringer. Det betyr at for å motbevise hypotesen, så trengs bare ett eneste eksempel hvor hypotesene feiler. Det var det Milnor gjorde i sin artikkel fra 1961.

Milnors teorem

Let L_q denote the 3-dimensional lens manifold of type $(7, q)$, suitably triangulated, and let Δ^n denote an n-simplex. A finite simplicial complex X_q is obtained from the product $L_q \times \Delta^n$ by adjoining a cone over the boundary $L_q \times \partial\Delta^n$. The dimension of X_q is $n+3$.

Theorem 1. For $n+3 \geq 6$ the complex X_1 is homeomorphic to X_2.

Theorem 2. No finite cell subdivisions of the simplicial complex X_1 is isomorphic to a cell subdivision of X_2.

Teoremet gir et moteksempel til Hauptvermutungen.

Annals of Mathematics
Vol. 74, No. 3, November, 1961
Printed in Japan

TWO COMPLEXES WHICH ARE HOMEOMORPHIC BUT COMBINATORIALLY DISTINCT

By John Milnor[1]

(Received March 14, 1961)

Let L_q denote the 3-dimensional lens manifold of type $(7, q)$, suitably triangulated (see § 1), and let σ^n denote an n-simplex. A finite simplicial complex X_q is obtained from the product $L_q \times \sigma^n$ by adjoining a cone over the boundary $L_q \times \partial\sigma^n$. The dimension of X_q is $n + 3$.

Theorem 1. *For $n + 3 \geqq 6$ the complex X_1 is homeomorphic to X_2.*

Theorem 2. *No finite cell subdivision of the simplicial complex X_1 is isomorphic to a cell subdivision of X_2. In particular there is no piecewise linear homeomorphism from X_1 to X_2.*

The proof of Theorem 1 will be based on a recent result of B. Mazur. For the special case $n = 3$ (which is somewhat more difficult) the proof will make use of theorems of A. Haefliger and J. Stallings.

The proof of Theorem 2 will be based on the concept of "torsion" as defined by Reidemeister, Franz, and de Rham.

These two theorems show that the Hauptvermutung[2] for simplicial complexes of dimension $\geqq 6$ is false. On the other hand Papakyriakopoulos [10] has proved the Hauptvermutung for complexes of dimension $\leqq 2$.

The Hauptvermutung for manifolds remains open. However Moise [8] has proved the Hauptvermutung for manifolds of dimension $\leqq 3$; and Smale [13] has proved it for triangulations of the sphere S^n, $n \neq 4, 5, 7$, which look locally like the usual triangulation. A weak form of the Hauptvermutung for cells and spheres has been proved by Gluck [4].

As bi-products of the argument, two other curious phenomena appear. The symbols

$$S^{n-1} \subset D^n \subset R^n$$

will always denote the unit sphere bounding the unit disk in euclidean n-space.

Theorem 3. *The manifold-with-boundary $L_1 \times D^5$ is not diffeomorphic to $L_2 \times D^5$. However the interiors of these two manifolds are diffeomorphic.*

1 The author wishes to thank the Sloan Foundation for its support.

2 See, for example, Alexandroff and Hopf [1, p. 152]. I do not know who originated the term "Hauptvermutung". The problem was clearly formulated by Tietze [18, pp. 13-14] in 1908. See also Steinitz [15, p. 23].

575