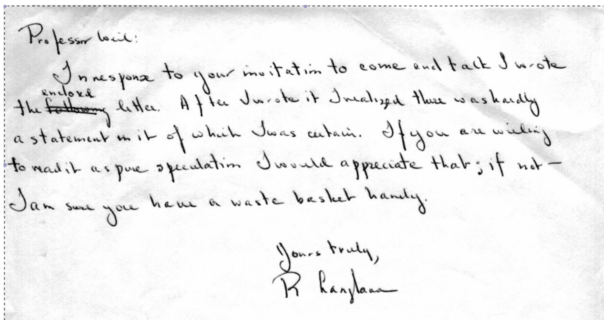
17 håndskrevne sider som formet et helt matematisk forskningsfelt



Professor Weil:

In response to your invitation to come and talk I wrote the ~~following~~ enclose letter. After I wrote it I realized there was hardly a statement in it of which I was certain. If you are willing to read it as pure speculation I would appreciate that; if not – I am sure you have a waste basket handy.

Yours truly,
R Langlands

"In response to your invitation to come and talk I wrote the enclosed letter. After I wrote it I realized there was hardly a statement in it of which I was certain. If you are willing to read it as pure speculation I would appreciate that; if not - I am sure you have a waste basket handy."

Dette er teksten i følgebrevet til Robert P. Langlands 17-siders håndskrevne brev til André Weil, datert januar 1967. Den drøyt 60 år gamle André Weil var en av det 20. århundres mest innflytelsesrike matematikere, spesielt innen tallteori og algebraisk geometri. Robert P. Langlands var 30 år yngre, en lovende matematiker, men fortsatt i begynnelsen av sin karriere. Weil svarte ikke på brevet, men han sørget for at det ble maskinskrevet, og kopier av den maskinskrevne versjonen spredde seg raskt i det internasjonale matematiske miljøet. Innholdet i brevet ble snart kjent som "Langlands formodninger".

Et berømt resultat innen tallteori sier at et odde primtall p kan skrives som en sum av to kvadrattall hvis og bare hvis primtallet har rest 1 når vi deler på 4. I matematisk terminologi uttrykkes dette ved at p er kongruent med 1 modulo 4. Resultatet ble formulert av Fermat allerede i 1640 og bevist av Euler rundt hundre år senere. Tallene 5, 13, 17 og 29 er de minste primtallene som er kongruente med 1 modulo 4, og de tilhørende oppdelingene i kvadratsummer er $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$ og $29 = 2^2 + 5^2$. Tilsvarende er det ingen måte å skrive 3, 7, 11 eller 19 som kvadratsummer, siden alle disse gir rest 3 når vi deler med 4. Resultatet knytter sammen en subtil aritmetisk egenskap ved et primtall p, det å kunne representeres ved en kvadratsum, med en kongruensrelasjon for tallet.

Det å representere et tall p ved en kvadratsum er ekvivalent med å faktorisere tallet som et **Gaussisk heltall**. Et Gaussisk heltall er et kompleks tall der både realdel og imaginærdel er hele tall. Primtallet p kan faktoriseres som et Gaussisk heltall hvis og bare hvis det finnes to andre heltall m og n slik at

$$p = (m + in)(m - in)$$

Her står i for den imaginære enheten, definert ved egenskapen $i^2 = -1$. En enkel utregning viser at en slik faktorisering er ekvivalent med at $p = m^2 + n^2$, dvs. at p kan representeres ved en kvadratsum.

Faktorisering av et primtall som et Gaussisk heltall er nært knyttet til det som kalles **Galoisteori** for de Gaussiske tallene. Gaussiske tall er utvidelsen av Gaussiske heltall til også omfatte brøker, dvs. komplekse tall der både real- og imaginær-del er rasjonale tall. For et hvert primtall p finnes det et spesielt element i den såkalte **Galoisgruppa** til de Gaussiske tallene, omtalt som **Frobenius-automorfien**. Ordenen til Frobenius-automorfien er en sentral størrelse for å avgjøre om p kan skrives som en sum av kvadrater eller ikke. Ordenen til en automorfi er det minste tallet m slik at den m-te iterasjonen av automorfien er identiteten. Frobenius-automorfien er definert som p-potensen av et tall, og p-potensen av den imaginære enheten i for et odde primtall er enten i eller $-i$, avhengig av om vi får 1 eller 3 i rest når vi deler med 4.

Innholdet i Langlands' brev til Weil foreslår en vidtrekkende generalisering av resultatet knyttet til representasjon av et primtall som en kvdratsum. Det legger grunnlaget for å relatere Galois-grupper i algebraisk tallteori til automorfe former og representasjonsteori for algebraiske grupper over lokale kropper og adeler.

Et hovedanliggende innen tallteori er å finne heltallsløsninger til likninger med heltallige koeffisienter. Det er nokså opplagt at dersom det finnes en heltallsløsning, så kan likningen også løses modulo en hver potens p^k for et hvert primtall p. Den tyske matematikeren **Kurt Hensel** introduserte i 1897 de såkalte p-adiske tallene. Med det reduserte han problemet med å finne løsninger for en hver potens p^k, for alle k, til kun ett enkelt problem; å finne løsninger i de p-adiske tallene. Et berømt teorem, formulert av Hermann Minkowski og senere generalisert av Helmut Hasse, gir et positivt svar på den motsatte problemstillingen, omtalt som **lokalt-globalt-prinsippet**: Vil funn av en løsning for en likning over de p-adiske tallene for alle primtall p bety at det finnes en heltallsløsning? Hasse-Minkowski-teoremet sier at dette er tilfelle for kvadratiske likninger. Men det gjelder ikke generelt. Et eksempel på det er Fermat-likningen $x^n + y^n = z^n$, for $n \geq 3$. Abelpris-vinner Andrew Wiles beviste i 1995 at denne likningen ikke har noen heltallige løsninger. Men allerede i 1909 var det kjent at det finnes løsninger i de p-adiske tallene for alle primtall p.

Selv om ikke lokalt-globalt-prinsippet er gyldig i noen stor generalitet, så spiller de p-adiske tallene en framtredende rolle i tallteori. Men en enda større rolle har samlingen av alle de p-adiske tallene, som sammen med de reelle tallene danner et algebraisk objekt, kalt **adelene**.

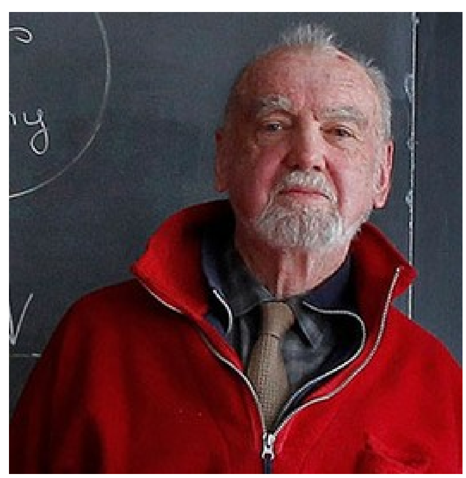
I begynnelsen av januar 1967 møttes Langlands og Weil tilfeldig i en korridor på "the Institute for Defense Analysis" i Princeton. Begge var de litt tidlig ute til en forelesning med Shiing-Shen Chern. Litt i villrede om hvordan han best skulle starte samtalen, begynte Langlands å fortelle om sine tanker rundt sammenhengen mellom tallteori og automorfe former. Langlands har siden beskrevet Weils reaksjon som "en velkjent krigslist for på en høflig måte å unnslippe påtrengende personer" da han ba den unge matematikeren om heller å skrive ned sine tanker i et brev.

Automorfe former ble introdusert av Henri Poincaré på 1880-tallet som en del av hans doktoravhandling. Enkelt sagt er en automorf form en funksjon på det øvre halvplan av det komplekse planet med en bestemt periodisitets-egenskap. I Langlands' visjonære arbeid betrakter han en utvidet bruk av automorfe former, og ser på dem som representasjoner av adelene, fortsatt med den samme periodisitets-egenskapen.

Husk at Langlands-korrespondansen foreslår å relatere Galois-grupper i algebraisk tallteori til automorfe former og representasjonsteori for algebraiske grupper over lokale kropper og adeler. Husk også at Langlands i brevet åpner opp for et langsiktig forskningsprogram mer enn å bevise en rekke teoremer,

Det mest berømte eksemplet på Langlands-korrespondansen er modularitetsteoremet, som Andrew Wiles fikk Abelprisen for i 2016 for å ha bevist. Taniyama-Shimura-Weil-formodningen forutser at det er en nær forbindelse mellom antall løsninger av en bestemt type likninger, kalt elliptiske kurver, og modulære former, en avart av automorfe former. I dette eksempelet vil representasjonsteorien til Galois-gruppa til en maksimal utvidelse av de rasjonale tallene produsere en følge av tall som koder antall løsninger til en elliptisk kurve modulo varierende i p. Langlands-korrepondansen relaterer denne følgen av tall til en annen tallfølge som karakteriserer automorfe former over adelene. Shimura-Taniyama-Weil-formodningen, og derigjennom Fermats siste teorem, blir da å betrakte som et spesialtilfelle av Langlands-korrepondansen.

Dette er bare ett av mange eksempler på hvordan ideene til Langlands har hatt vidtrekkende innflytelse i forskjellige områder av matematikken. Det er ingen overdrivelse å si at hans 17 håndskrevne sider har formet et helt matematisk forskningsfelt.



Robert P. Langlands